M. T. A.
SZÁMITÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA
KÖNYVTÁRA
Budapest V, Nádor u. 7
1127-21
159

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI

1

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместители гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Л. А. ЖЕКУЛИН, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь редакции Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

MTA. Számtechn. Könyvtára
Leltározva
1962 év 482 sz.

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

MTA Számítástechnikai Könyvtára

Том VI ЯНВАРЬ 1961 Вып. 1

СОДЕРЖАНИЕ

унькин Ф. В. О тепловых флуктуациях в нелинейных системах 3
ахарева М. Ф. Поперечная корреляция флуктуаций поля при конечных размерах приемных линз 9
росин А. В. К расчету мощности перекрестных шумов в системах дальней связи 14
снатьев Н. К. Энергетический спектр сигнала, получаемого посредством развертки 25
айнштейн Л. А., Федоров А. А. Рассеяние плоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционных лучей 31
ряинов А. С. Дифракция плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси конуса 47
вов А. Н. Падение плоской электромагнитной волны на плоскую решетку (случай, когда вектор H параллелен проводам) 58
шкин А. Я. Равномерный изгиб $П$- и $Т$-волноводов в плоскости E 67
кольский В. В. Исследование полых систем с анизотропными областями методом собственных функций. Ч. III. Волновод 74
лгаков Б. М., Шестопалов В. П., Шишкин Л. А., Якименко И. П. Необратимое распространение волн в спиральном волноводе, помещенном в ферритовую среду 81
естопалов В. П., Булгаков А. А. Коаксиальная замедляющая система из двух спиралей со встречной намоткой, заполненная магнитодиэлектрической средой 92
й Янь-шэн. Некоторые методы решения задачи о колебаниях малой гиротропной сферы. Ч. II. Метод рядов 101
дотов А. П., Шембель Б. К. Резонатор линейного ускорителя как нагрузка высокочастотных генераторов 108
бов Г. Д. Газоразрядный детектор колебаний СВЧ 117
бин С. Б. Некоторые теоретические вопросы работы фазометра на СВЧ . . 125
рицкий А. Л. Оптимальная фокусировка электронного пучка в периодическом фокусирующем устройстве ЛБВ 137
нопольский Н. Л., Карелина Н. А., Малышева В. С. Некоторые результаты исследования вторичной электронной эмиссии на прострел эмиттеров из окиси магния. 146
зарц Я. М. К теории работы электростатического флюксметра в плазме . . 153
лова Н. А., Ковалев А. Н. Экспериментальное исследование туннельного тока в узких германиевых p — n-переходах 160
заров Е. Н., Жаботинский М. Е. Флуктуации в генераторе на отражательном клистроне, обусловленные разбросом скоростей электронов в потоке, дробовым и тепловым эффектами 166

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

йтлин М. Б., Ильина Е. М. Усиление лампы бегущей волны при конечных значениях параметра усиления C 170
игорьянц В. В., Жаботинский М. Е. Молекулярный генератор на аммиаке, работающий без жидкого азота 175

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

бович М. Д. К вопросу о механизме возбуждения электронных плазменных колебаний 178
брам Федорович Иоффе 180

Адрес редакции: Москва, К-9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электрони
АН СССР, редакция журнала «Радиотехника и электроника»
Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-00312 Подписано к печати 6/I 1961 г. Тираж 5600 экз. Зак. 11
Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Бум. л. 5,75 Печ. л. 15,76 Уч.-изд. л. 1

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 1

О ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Ф. В. Бункин

Показано, что известная флуктуационно-диссипационная теорема строго применима для описания спектральной интенсивности термодинамически равновесных флуктуаций в произвольных (в том числе и нелинейных) пассивных системах. Проведено качественное обсуждение этого вопроса с точки зрения кинетической теории электропроводности.

1. В последнее время появилось довольно много теоретических работ, посвященных изучению термодинамически равновесных тепловых флуктуаций в нелинейных системах [1—10], т. е. системах, макроскопические процессы в которых описываются нелинейными уравнениями. Рассмотрение задачи в этих работах проводится на простейшем примере электрической RC-ячейки с нелинейной вольтамперной характеристикой сопротивления. Авторы упомянутых работ исходят из того, что когда среднеквадратичное значение тепловых флуктуаций напряжения на емкости $\sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{kT/C}$ * становится настолько большим (например, в результате возрастания температуры T), что выходит из области линейности вольтамперной характеристики, результаты обычной теории броуновского движения линейных систем оказываются неприменимыми. При этом делаются попытки построения «более общей» теории броуновского движения, справедливой при сколь угодно больших флуктуациях (в частности, высоких температурах). Обращает на себя внимание тот факт, что окончательные результаты всех указанных работ отличаются друг от друга, за исключением одного: в работах [3, 5, 7, 9] приходят к выводу, что в состоянии термодинамического равновесия среднее значение заряда $\bar{q}$ на емкости в нелинейной RC-ячейке отлично от нуля и равно $\bar{q} = -e/2$ (e — заряд электрона). Несмотря на то, что этот результат противоречит, во-первых, второму принципу термодинамики и, во-вторых, условию непрерывности **, авторы отнюдь не рассматривают его как указание на несостоятельность развиваемого ими подхода. Наоборот, в работах [7, 9] в связи с этим обсуждается вопрос о применимости второго принципа термодинамики к нелинейным системам и об экспериментальной проверке соотношения $\bar{q} = -e/2$.

На трудность, возникающую при формальном применении теоремы Найквиста для описания тепловых флуктуаций в нелинейных системах, указывал еще Л. Бриллюэн [11]. Он рассмотрел систему, состоящую из линейного полного сопротивления $Z = R + iX$, замкнутого на нелинейный элемент с вольтамперной характеристикой $V = ri + bi^2$, и показал, что при описании тепловых флуктуаций в такой системе при помощи эдс Найквиста второй принцип термодинамики не нарушается, если считать, что эдс наряду с флуктуационной составляющей $e(t)$ имеет постоянную составляющую e_0, определяемую как температурой системы T, так и ее

---

* При этом предполагается, что справедлив закон равнораспределения энергии по степеням свободы, т. е. в данном случае равенство $C\overline{u^2}/2 = kT/2$.

** Согласно формуле $\bar{q} = -e/2$ среднее значение заряда определяется мировой константой и не зависит от свойств сопротивления. При этом не получается непрерывный переход к линейной RC-ячейке, для которой $\bar{q} = 0$.

электрическими параметрами R, r, X и b. Роль составляющей e_0 сводится к компенсации выпрямляющего эффекта нелинейной цепи (при $b = 0$, $e_0 = 0$). Кроме того, им показано, что спектральная интенсивность флуктуаций $e(t)$ должна определяться линеаризованным сопротивлением цепи, т. е.

$$\overline{e_\nu^2} = 4(R + r)kT. \qquad (1)$$

2. В настоящей статье обращается внимание на то, что известная флуктуационно-диссипационная теорема [12, 13] *, являющаяся обобщением классической теоремы Найквиста на флуктуации произвольной физической природы, строго применима к произвольным (нелинейным) системам. Это означает, что спектральная интенсивность термодинамически равновесных флуктуаций в произвольной системе, находящейся при температуре T, всегда точно определяется свойствами соответствующей линеаризованной системы (например, ее комплексной проводимостью), взятыми при данной температуре.

Нелинейный характер макроскопических уравнений системы, таким образом, не имеет отношения к задаче о спектре равновесных флуктуаций в этой системе.

Если считать только что высказанное утверждение доказанным (см. ниже), то можно пойти еще дальше. Известно, что полная теория броуновского движения, т. е. теория, занимающаяся изучением n-мерных вероятностных распределений $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для равновесных флуктуаций $x(t)$ $[x_i = x(t_i)]$ **, вытекает из спектральной теории броуновского движения, основу которой составляет флуктуационно-диссипационная теорема, если принять одно дополнительное предположение об определенном характере флуктуаций $x(t)$. Обычно в качестве такого предположения выбирается следующее [21]: либо $x(t)$ — гауссовский процесс, либо $x(t)$ — непрерывный марковский процесс ***. Каждого из этих предположений достаточно (см., например, [21]), чтобы в совокупности с флуктуационно-диссипационной теоремой установить точный вид функции $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. получить исчерпывающую (в вероятностном смысле) информацию о флуктуациях. Важно отметить, что при таком обобщении теории физические свойства системы, в частности вид описывающих ее макроскопических уравнений, уже не играют никакой роли ****. Отсюда следует, что если мы постулируем, например, гауссовский характер равновесных флуктуаций в произвольной системе, то свойства соответствующей линеаризованной системы (например, ее комплексная проводимость $\alpha(\omega)$ или матрица комплексных проводимостей $\alpha_{nm}(\omega)$ в случае нескольких переменных) будут однозначно определять не только спектральные свойства этих флуктуаций, но и всю их статистику (т. е. функцию $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

3. Обратимся теперь к нашему основному утверждению, а именно, что флуктуационно-диссипационная теорема строго применима к произвольной пассивной системе. Для этого рассмотрим вывод этой теоремы, изложенный в [13]. Для простоты ограничимся случаем одной флуктуи-

---

* Обобщение этой теоремы на случай нескольких флуктуирующих величин и флуктуаций поля см. в [13—20].

** $x(t)$ рассматривается как случайный процесс, описывающий флуктуирующую физическую величину во времени.

*** В случае нескольких флуктуирующих величин необходимо вводить понятие о многомерном соответственно гауссовском или непрерывном марковском процессах. Марковский процесс называется непрерывным, если вероятность перехода для него удовлетворяет уравнению Эйнштейна — Фоккера.

**** Это ясно из того, что n-мерное гауссовское распределение полностью определяется средними значениями $\overline{x_k}$ и вторыми моментами $\overline{x_i x_k}$, значения которых дает флуктуационно-диссипационная теорема.

рующей величины $x(t)$ (в состоянии теплового равновесия среднее значение $\bar{x} = 0$). Рассматриваемый вывод распадается на два независимых этапа. Во-первых, при единственном предположении о стационарности равновесных флуктуаций $x(t)$ и справедливости канонического распределения Гиббса (применительно к системам в термостате) путем квантово-механического формализма вычисляется спектральная интенсивность $(x^2)_\omega$ этих флуктуаций в произвольной системе через ее температуру T, матричные элементы x_{nm} оператора $\hat{x}$ относительно стационарных состояний системы и собственные значения энергии E_i этих состояний (см. [13], стр. 456):

$$(x^2)_\omega = \psi(\omega; T, x_{nm}, E_i). \tag{2}$$

Коль скоро функция ψ получена, то в принципе, если нам известны матричные элементы x_{nm} и энергии E_i, задача о спектральных свойствах равновесных флуктуаций в произвольной системе уже решена. Динамические свойства системы, в частности вид ее макроскопических уравнений, на этом этапе не фигурируют вовсе.

Второй этап, также вполне самостоятельный, заключается в квантово-механическом вычислении через те же величины ω, T, x_{nm} и E_i передаточной функции (комплексной проводимости) $\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$, определяющей средний (макроскопический) линейный отклик $\bar{x}_\omega$ на достаточно слабое гармоническое внешнее воздействие f_ω: $\bar{x}_\omega = \alpha(\omega) f_\omega$. В частности, это вычисление дает мнимую часть комплексной проводимости (см. [13], стр. 456)

$$\alpha''(\omega) = \varphi(\omega; T, x_{nm}, E_i). \tag{3}$$

Этот этап, таким образом, дает динамическое описание рассматриваемой произвольной системы при столь слабых внешних воздействиях, когда нелинейными эффектами в отклике можно пренебречь. При этом вовсе не рассматриваются флуктуации величины x.

Флуктуационно-диссипационная теорема возникает при сравнении правых частей выражений (2) и (3). Оказывается, что без всяких дополнительных предположений величину $\psi(\omega; T, x_{nm}, E_i)$ (т. е. $(x^2)_\omega$) можно универсальным образом выразить через величину $\varphi(\omega; T, x_{nm}, E_i)$ (т. е. $\alpha''(\omega)$). При этом получается ([13], стр. 456)

$$(x^2)_\omega = \frac{\hbar}{2\pi} \alpha''(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT}. \tag{4}$$

Таким образом, вне зависимости от того, как ведет себя рассматриваемая система при сильных воздействиях на нее (она при этом может быть как угодно нелинейна), спектральная интенсивность равновесных флуктуаций в ней всегда определяется свойствами линеаризованной системы (функцией $\alpha''(\omega)$ в случае одной переменной и матрицей $(\alpha^*_{mn} - \alpha_{nm})$ в случае многих переменных) и ее температурой T*. Отсюда, в частности, следует, что флуктуации $x(t)$ можно всегда (а не только для динамически линейных систем) рассматривать как отклик линеаризованной системы на стороннюю случайную силу $f(t)$ со спектральной интенсивностью

$$(f^2)_\omega = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\alpha''(\omega)}{|\alpha(\omega)|^2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT}. \tag{5}$$

* После того как данная работа была закончена, появилась статья [16], в которой авторы приходят к тем же выводам, касающимся вопроса применимости флуктуационно-диссипационной теоремы к нелинейным системам. В указанной статье, однако, отсутствует обсуждение этого вопроса с кинетической точки зрения (см. ниже).

Этот результат подтверждает результат Л. Бриллюэна (1) и исключает необходимость введения постоянной составляющей эдс e_0.

При применении флуктуационно-диссипационной теоремы к флуктуациям электромагнитного поля в нелинейной среде спектральные интенсивности сторонних случайных индукций в каждой точке среды должны определяться, очевидно, теми же формулами (аналогичными (5)), что и в случае линейной среды [13, 17—20]. Как и в последнем случае, эти формулы могут применяться и для определения интенсивности сторонних индукций в неравномерно нагретых телах. В случае нелинейных сред при этом могут возникать эффекты детектирования собственных флуктуаций, не означающие, однако, нарушения второго принципа термодинамики, поскольку имеется неравномерный нагрев.

4. Выясним теперь с физической точки зрения причину того, что нелинейные эффекты в системе никак не сказываются на статистических свойствах тепловых равновесных флуктуаций в ней (во всяком случае на спектральной интенсивности этих флуктуаций). Рассмотрим этот вопрос на примере электрических флуктуаций в системе, содержащей активные сопротивления с нелинейными вольтамперными характеристиками. Для этого обратимся к кинетической теории электропроводности в сильных квазистатических полях [22—26]. Условие квазистатичности поля в данном случае означает, что характерное время τ_0 изменения поля должно быть велико по сравнению со всеми микроскопическими временами релаксации $\tau_{\text{рел}}$ в рассматриваемом проводнике:

$$\tau_0 \gg \tau_{\text{рел}}. \tag{6}$$

С макроскопической точки зрения условие (6) означает, что рассматриваемый проводник не обладает дисперсией и его электрические свойства можно охарактеризовать при помощи одного параметра — электрического сопротивления R. Именно этот случай нас сейчас и интересует.

Как показано в работах [22—26], вследствие того, что при каждом соударении с тяжелой частицей электрон передает ей лишь малую часть $\delta = \Delta\varepsilon / \varepsilon$ своей энергии ε (для газов $\delta \sim m/M \ll 1$, для полупроводников и металлов $\delta \sim mv_s^2/kT \ll 1$, где m и M — массы электрона и тяжелой частицы соответственно; v_s — скорость звука; T — температура решетки), функцию распределения $f(\mathbf{p})$ электронов в пространстве импульсов $\mathbf{p}$ с точностью до членов высшего порядка относительно δ можно представить в виде

$$f(\mathbf{p}) = f_0(p) + f_1(p)\, p_x / p. \tag{7}$$

Симметричная часть $f_0(p)$ всегда (вплоть до пробоя) значительно больше асимметричной части $f_1(p)\, p_x / p$, определяющей электропроводность среды σ ($f_0 \gg f_1$); ось x направлена вдоль электрического поля E. В равновесном состоянии, когда $E = 0$, симметричная часть $f_0(p)$ есть максвелловское (для газов и полупроводников) или фермиевское (для металлов) распределение, а $f_1(p) = 0$. Влияние поля на распределение электронов $f(\mathbf{p})$ и электропроводность σ определяется параметром

$$\eta = \left(\frac{elE}{kT}\right)^2 \Big/ \delta, \tag{8}$$

где e и l — соответственно заряд и средняя длина свободного пробега электрона. В случае слабого поля, когда $\eta \ll 1$, с точностью до членов порядка η справедлив закон Ома (σ не зависит от E), а симметричная часть $f_0(p)$ остается равновесным распределением, соответствующим температуре решетки T. Весь эффект поля сводится при этом к дрейфу электронов, распределение которых в импульсном пространстве остается равновесным.

Основным результатом излагаемой теории для обсуждаемого вопроса является то, что отклонение от закона Ома, наступающее при $\eta \gtrsim 1$, всегда сопровождается отклонением функции $f_0(p)$ (а следовательно, и полной функции распределения $f(p)$) от равновесной. Таким образом, в области нелинейности вольтамперной характеристики проводящего элемента распределение носителей электричества в нем всегда существенно неравновесное *. Отсюда ясно, что нелинейность вольтамперных характеристик, и следовательно, и нелинейность самих уравнений, описывающих макроскопические процессы в системе, не имеет отношения к задаче о равновесных флуктуациях в этой системе. Поскольку при любой величине равновесных флуктуаций (в частности, при любой температуре) функция $f_0(p)$ остается (по определению) равновесной функцией распределения, система всегда ведет себя как линейная в том смысле, что свойства этих флуктуаций определяются соответствующими линеаризованными (относительно нулевого решения) макроскопическими уравнениями системы.

Рассматриваемая «самолинеаризация» системы при возрастании ее температуры качественно объясняется зависимостью параметра η от температуры: при возрастании T расширяется область линейности вольтамперной характеристики (область значений E, где еще справедлив закон Ома). Легко показать, что в состоянии теплового равновесия системы условие $\eta \ll 1$ удовлетворяется автоматически. Рассмотрим для простоты RC-ячейку. Условие квазистатичности (6) в данном случае сводится к требованию $RC \gg \tau_{\text{рел}}$, где $\tau_{\text{рел}}$ — любое микровремя релаксации, в частности время релаксации энергии $l/\bar{v}\delta$ ($\bar{v}$ — средняя тепловая скорость электрона). Заметим, что при $RC \lesssim l/\bar{v}\delta$ проводящий элемент уже нельзя рассматривать как безынерционное сопротивление R, а сама система перестает быть RC-ячейкой как таковой **.

Для RC-ячейки в тепловом равновесии $E \sim (kT/CL^2)^{1/2}$, где L — длина сопротивления. Учитывая далее, что $R \sim L^2/\sigma V = L^2/en_e\mu V$, а подвижность $\mu \sim el/\sqrt{mkT}$ (n_e — плотность электронов, V — объем сопротивления), для параметра η получаем

$$\eta \sim \left[\frac{l}{\bar{v}\delta} \Big/ RC\right] N_e^{-1}, \tag{9}$$

где N_e — полное число свободных электронов в сопротивлении. Поскольку $N_e \gg 1$, параметр η действительно пренебрежимо мал.

Автор благодарен С. М. Рытову и Л. И. Гудзенко за полезное обсуждение рассмотренных в статье вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. K. C. MacDonald, Philos. Mag., 1954, 45, 63.
2. D. Polder, Philos. Mag., 1954, 45, 69.
3. D. K. C. MacDonald, Phys. Rev., 1957, 108, 541.
4. N. G. van Kampen, Phys. Rev., 1958, 110, 319.
5. C. T. J. Alkemade, Physica, 1958, 24, 1029.
6. R. O. Davies, Physica, 1958, 24, 1055.
7. A. Marek, Czech. J. Phys., 1959, 9, 260.

* В некоторых случаях (например, в металлах [25, 26]) даже в сильных полях ($\eta \gtrsim 1$) функция $f_0(p)$ имеет вид равновесного распределения, соответствующего электронной температуре $\theta > T$. По отношению к термостату, имеющему температуру T, это распределение, разумеется, неравновесно.

** Нарушения условия $RC \gg l/\bar{v}\delta$ при возрастании T можно ожидать, например, в том случае, когда проводящим элементом является газ. Если температура T столь велика, что газ почти полностью ионизован, то средняя длина свободного пробега $\sim T^2$ (соударения с ионами) и, следовательно, время $l/\bar{v}\delta$ растет с температурой как $T^{3/2}$. Однако хорошо известно, что именно на частотах $\omega \gtrsim \bar{v}\delta/l$ плазма обладает сильно выраженными дисперсионными свойствами.

8. В. Б. Магалинский, ЖЭТФ, 1959, 36, 1423.
9. A. Marek, Physica, 1959, 25, 1358.
10. M. Lax, Rev. Mod. Phys., 1960, 32, 25.
11. L. Brillouin, Phys. Rev., 1950, 78, 627.
12. H. B. Callen, T. A. Welton, Phys. Rev., 1951, 83, 34.
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, 1959.
14. H. B. Callen, M. L. Barasch, J. L. Jackson, Phys. Rev., 1952, 88, 1382.
15. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan, 1957, 12, 570.
16. W. Bernard, H. B. Callen, Rev. Mod. Phys., 1959, 31, 1017.
17. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, Изд. АН СССР, 1953.
18. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 1957, 32, 811.
19. С. М. Рытов, Докл. АН СССР, 1956, 110, 371.
20. В. П. Силин, Изв. вузов МВО (Радиофизика), 1959, 2, 198.
21. M. C. Wang, G. E. Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys., 1945, 17, 323.
22. Л. Ландау, А. Компанеец, ЖЭТФ, 1935, 5, 276.
23. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, 1936, 6, 471; 1937, 7, 1069.
24. Б. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, Успехи физ. наук, 1940, 24, 21.
25. В. П. Шабанский, ЖЭТФ, 1954, 27, 147.
26. В. Л. Гинзбург, В. П. Шабанский, Докл. АН СССР, 1955, 100, 445.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
24 VI 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
1961 № 1

ПОПЕРЕЧНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ПОЛЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРАХ ПРИЕМНЫХ ЛИНЗ

М. Ф. Бахарева

Получен коэффициент поперечной корреляции R для флуктуаций поля в фокусах линз, на которые падает монохроматическая и первоначально плоская волна, прошедшая слой среды с крупномасштабными случайными неоднородностями показателя преломления. Показано, что если размеры линз соизмеримы с радиусом поперечной корреляции флуктуаций поля, то с увеличением расстояния между точками приема коэффициент R при наличии линз убывает медленнее, чем в их отсутствие.

ВВЕДЕНИЕ

Для случая прохождения плоской монохроматической волной слоя среды с крупномасштабными случайными неоднородностями показателя преломления поперечная корреляционная функция флуктуаций поля найдена в работе Л. А. Чернова [1] в предположении, что в точках приема линзы отсутствуют. Однако в реальных условиях прием всегда осуществляется на линзы или антенны конечных размеров. Если при этом размеры антенн сравнимы с радиусом корреляции флуктуаций поля, то усиление антенн используется не полностью, что приводит, как известно [2, 3], к уменьшению относительной интенсивности флуктуаций в фокусах антенн.

В данной работе исследовано влияние конечных размеров линз на коэффициент поперечной корреляции R флуктуаций поля в фокусах линз. Получена зависимость R от параметра распространения α, относительного размера линз h/a (a — средний размер неоднородностей в среде) и относительного расстояния между фокусами линз $(h+d)/a$. Показано, что при наличии линз, у которых h сравнимо с a, коэффициент поперечной корреляции убывает с увеличением расстояния между точками приема медленнее, чем в отсутствие линз.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в двух точках приема случайного волнового поля расположены линзы. Обозначим через P_i напряженность поля в фокусе i-ой линзы ($i = 1, 2$). Пространственная корреляционная функция K для флуктуаций поля в точках приема есть

$$K = \overline{\Delta P_1 \Delta P_2^*} = \overline{P_1 P_2^*} - \overline{P_1}\,\overline{P_2^*}. \tag{1}$$

Будем считать, что линзы расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения первичной волны, падающей на слой толщины L статистически неоднородной среды (рис. 1). Значение поля P_i в фокусе i-ой линзы связано с полем p перед линзой соотношением

$$P_i = \frac{jkA_0}{2\pi F} e^{-jkF} \int\limits_{\Sigma_i} p(\vec{\rho})\, ds, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

где Σ_i — площадь i-ой линзы; ds — элемент этой площади; $\vec{\rho}$ — радиус-вектор этого элемента; F — фокусное расстояние; k — волновое число; A_0^2 — интенсивность падающей на слой волны. Будем предполагать, что обе линзы идентичны. На основании (1) и (2) корреляционную функцию K можно представить в виде

$$K = \frac{k^2 A_0^2}{4\pi^2 F^2} \int_{\Sigma_1}\int_{\Sigma_2} \overline{\Delta p(\vec{\rho})\, \Delta p^*(\vec{\rho}')}\, ds\, ds', \tag{3}$$

где $\Delta p = p - \bar{p}$ — флуктуации поля в плоскости линзы. Под знаком интеграла в (3) фигурирует поперечная корреляционная функция флуктуаций поля, вычисленная в работе Л. А. Чернова [2], а именно:

$$\overline{\Delta p(\vec{\rho})\, \Delta p^*(\vec{\rho}')} = e^{\alpha\left[e^{-\frac{l^2}{a^2}}-1\right]} - e^{-\alpha}, \tag{4}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\pi}\, \bar{\mu}^2 k^2 a L \tag{5}$$

— параметр распространения; l — расстояние между точками $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}'$; $\bar{\mu}^2$ — средняя интенсивность флуктуаций показателя преломления среды.

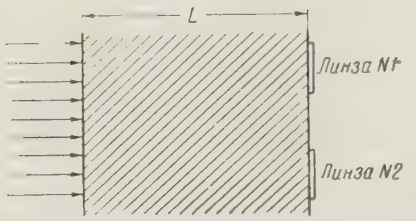


Рис. 1. Прохождение волны через слой толщины L. Стрелки указывают направление распространения

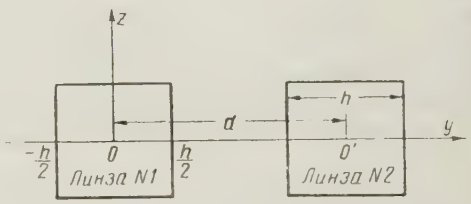


Рис. 2. Расположение линз в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Точки O и O' — фокусы линз

Пусть линзы ограничены квадратными диафрагмами со стороной h. Тогда, согласно (3) и (4), если ввести пределы интегрирования в соответствии с обозначениями, показанными на рис. 2, искомая корреляционная функция запишется в виде

$$K = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int dz_1 dz_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{h}{2}+d}^{\frac{h}{2}+d} e^{\alpha\left[e^{-\frac{l^2}{a^2}}-1\right]} - e^{-\alpha}\, dy^2, \tag{6}$$

причем $l^2 = (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Разложим экспоненту подынтегрального выражения в (6) в ряд:

$$\exp\left[\alpha e^{-\frac{l^2}{a^2}}\right] = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} e^{-m\frac{(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}{a^2}}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), находим

$$K = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \sum_m^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int e^{-\frac{m(z_1-z_2)^2}{a^2}} dz_1 dz_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{h}{2}+d}^{\frac{h}{2}+d} e^{-\frac{m(y_1-y_2)^2}{a^2}} dy_2,$$

что дает в результате интегрирования

$$K\left(\frac{h}{a}, \frac{d}{a}, \alpha\right) = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} e^{-\alpha} \pi a^4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m! m^2} \left[\frac{h}{a} \sqrt{m} \Phi\left(\frac{h}{a}\sqrt{m}\right) + \frac{e^{-\frac{h^2}{a^2}m} - 1}{\sqrt{\pi}} \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{d+h}{a} \sqrt{m} \Phi\left(\frac{d+h}{a}\right) - 2\frac{d}{a}\sqrt{m}\Phi\left(\frac{d}{a}\sqrt{m}\right) + \frac{d-h}{a}\sqrt{m}\Phi\left(\frac{d-h}{a}\sqrt{m}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-\left(\frac{d+h}{a}\right)^2 m} - 2e^{-m\left(\frac{d}{a}\right)^2} + e^{-m\left(\frac{d-h}{a}\right)^2} \right] \right\}. \qquad (8)$$

Как видно из (8), корреляционная функция K зависит от трех параметров: параметра распространения α, даваемого формулой (5), относительного размера линз h/a и относительного расстояния между центрами линз d/a.

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

Если в точках приема линзы отсутствуют ($h/a = 0$), то величина $K/\Sigma_1\Sigma_2 = K/h^4$ переходит, конечно, в выражение (4) для поперечной корреляционной функции флуктуаций поля.

Если обе линзы совмещены, т. е. $d/a = 0$, то получаем из (8) выражение для интенсивности флуктуаций поля $\overline{|\Delta P|^2}$ в фокусе линзы:

$$K\left(\frac{h}{a}, 0, \alpha\right) = \overline{|\Delta P|^2} =$$

$$= \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \pi a^4 e^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m! m^2} \left[\sqrt{m}\, \frac{h}{a}\, \Phi\left(\sqrt{m}\, \frac{h}{a}\right) + \frac{e^{-m\left(\frac{h}{a}\right)^2} - 1}{\sqrt{\pi}} \right]^2. \qquad (9)$$

Это выражение несколько отличается от выражения, вычисленного в работе М. Н. Крома [3], а именно:

$$\overline{|\Delta P|^2} = \frac{A_0^2}{\lambda^2 F^2} \pi a^4 e^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m! m}.$$

Отличие связано с тем, что мы не распространяли пределы интегрирования по относительной координате до бесконечности, как это сделано в работе [3].

На основании (8) и (9) коэффициент корреляции $R = \overline{\Delta P_1 \Delta P_2^*} \Big/ \overline{|\Delta P|^2}$ флуктуаций поля в фокусах идентичных линз можно записать в виде

$$R = R\left(\frac{h}{a}, \frac{d}{a}, \alpha\right) = K\left(\frac{h}{a}, \frac{d}{a}, \alpha\right) \Big/ K\left(\frac{h}{a}, 0, \alpha\right). \qquad (10)$$

В отсутствие линз в точках приема коэффициент корреляции принимает вид

$$R_0 = R\left(0, \frac{d}{a}, \alpha\right) = K\left(0, \frac{d}{a}, \alpha\right) \Big/ K(0, 0, \alpha) =$$

$$= \frac{e^{\alpha\left[e^{-\frac{d^2}{a^2}} - 1\right]} - e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}. \qquad (11)$$

Из (11) получаем, что в случае малых флуктуаций ($\alpha \ll 1$)

$$R_0 = e^{-\frac{d^2}{a^2}}, \tag{12}$$

а в случае больших флуктуаций ($\alpha \gg 1$)

$$R_0 = e^{-\alpha\frac{d^2}{a^2}}. \tag{13}$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 3 и 4 представлены результаты вычисления по формулам (8) — (13) зависимости R (сплошные кривые) и R_0 (пунктир) от d/a для $\alpha = 4$; 16; $\alpha \ll 1$ и для $h/a = 0{,}6$; 1; 2.

Из хода кривых можно сделать следующие выводы. Во-первых, при фиксированных h/a и α величина R для всякого d/a больше, чем R_0. Другими словами, корреляция между флуктуациями полей в фокусах линз убывает с ростом d/a медленнее, чем корреляция полей в тех же точках в отсутствие линз. Происходит это потому, что при $h \neq 0$ корреляция флуктуаций полей на ближних участках площади линз превышает R_0, поскольку расстояние между этими участками меньше расстояния

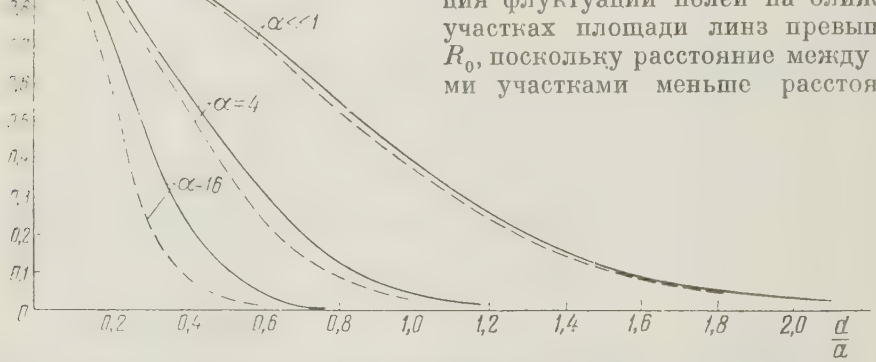


Рис. 3. Зависимость коэффициента поперечной корреляции R (сплошная линия) при наличии линз размера $h/a = 0{,}4$ и коэффициента поперечной корреляции R_0 (пунктир) в отсутствие линз от расстояния d/a между фокусами линз. Параметр распространения $\alpha = 4$; 16 и $\alpha \ll 1$

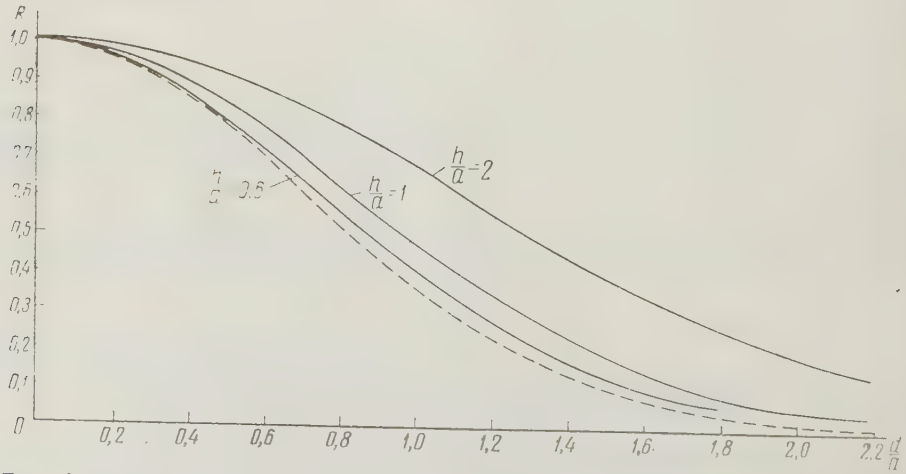


Рис. 4. Зависимость коэффициента поперечной корреляции R (сплошная линия) при наличии линз размера $h/a = 0{,}6$; 1; 2 и коэффициента поперечной корреляции R_0 (пунктир) в отсутствие линз от расстояния d/a между фокусами линз. Параметр распространения $\alpha \ll 1$

ежду центрами линз. Во-вторых, в случае малых флуктуаций ($\alpha \ll 1$) раз-ичие между R и R_0 становится заметным, когда размеры линз сравнимы размером неоднородностей среды a, а в случае $\alpha \gg 1$ — когда размеры инз значительно меньше a. Это объясняется тем, что, как следует из 2) и (13), при $\alpha \ll 1$ радиус поперечной корреляции флуктуаций поля авен a, а в случае $\alpha \gg 1$ равен $a/\sqrt{\alpha}$, т. е. в $\sqrt{\alpha}$ раз меньше [1, 2].

Автор пользуется случаем выразить благодарность С. М. Рытову за нимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

Л. А. Чернов, Акуст. ж., 1957, 3, 2, 192.
Л. А. Чернов, Акуст. ж., 1957, 3, 4, 360.
М. Н. Кром, Акуст. ж., 1959, 5, 1, 45.

Поступила в редакцию
1 VI 1960

К РАСЧЕТУ МОЩНОСТИ ПЕРЕКРЕСТНЫХ ШУМОВ В СИСТЕМАХ ДАЛЬНЕЙ СВЯЗИ

А. В. Просин

Определена мощность перекрестных шумов, которые возникают в системах дальней связи с частотной модуляцией и уплотнением каналов по частоте вследствие многолучевого распространения радиоволн. Показано, что при наличии постоянной составляющей поля величина переходных шумов в телефонных каналах линий связи, использующих дальнее тропосферное распространение УКВ, может быть весьма малой.

ВВЕДЕНИЕ

При дальнем тропосферном распространении УКВ суммарный сигнал на входе приемника обусловливается различными механизмами распространения, которые могут действовать как раздельно, так и одновременно. В результате этого поле в месте приема обычно представляет собой совокупность поля постоянной интенсивности (обусловленного дифракцией, отражением от различного рода инверсий, сверхрефракцией и тому подобными механизмами распространения радиоволн) и рассеянного поля.

В развитие работы [1] настоящая статья посвящена определению перекрестных искажений, возникающих в системах дальней связи с частотной модуляцией из-за наличия в месте приема постоянного и рассеянного полей при относительно небольших задержках постоянной волны. Анализ проведен в общем виде при использовании функции корреляции турбулентных неоднородностей воздуха, введенной в [2].

1. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Согласно методике корреляционного анализа, приведенной в [3], мощность перекрестных шумов равна

$$P_{\text{шт}} = 10^9 K_{\text{п}}^2 W_{\varepsilon}(\Omega_{\text{к}})\,\Delta F_{\text{к}} R_{\text{к}}^{-1} \quad \text{вт}, \tag{1}$$

где спектр и функция корреляции перекрестных помех определяются из выражений

$$W_{\varepsilon}(\Omega) = 4\Omega^2 \int_0^{\infty} \Psi_{\varepsilon_1}(\tau) \cos \Omega\tau d\tau, \tag{2}$$

$$\Psi_{\varepsilon_1}(\tau) = \overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+\tau)} = \frac{1}{\Delta\omega_m^2}\,\overline{\Psi(t)\,\Psi(t+\tau)}^{\sim} \tag{3}$$

В формулах (1) — (3) и далее обозначения величин, которые не выделяются особо, одинаковы с принятыми в [1]. При вычислении спектра помех необходимо в (3) исключить когерентные члены, не создающие перекрестных шумов в телефонных каналах.

2. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ПЕРЕХОДНЫХ ШУМОВ

На основании (4), (5) [1] и (3) функция корреляции будет равна

$$\Psi_{\varepsilon_1}(\tau) = \frac{1}{\Delta\omega_m^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{B(t)}{1+A(t)} \operatorname{arc\,tg}\frac{B(t+\tau)}{1+A(t+\tau)}\, W[B(t),$$

$$A(t),\ B(t+\tau),\ A(t+\tau)]\, dB(t)\, dA(t)\, dB(t+\tau)\, dA(t+\tau), \tag{4}$$

где $W[\ ]$ — четырехмерная функция распределения.

В работе [1] показано, что если отклонение диэлектрической проницаемости от ее среднего значения подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с нулевым средним значением, то $A(t)$ и $B(t)$ являются некоррелированными случайными функциями, которые подчиняются нормальному закону распределения вероятностей.

Вычисление (4) при указанных статистических свойствах $A(t)$ и $B(t)$ приведено в [4]. Для нашего случая функция корреляции помех определяется выражением

$$\Psi_{\varepsilon_1}(\tau) = \frac{1}{\Delta\omega_m^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{rmn} \frac{(-1)^{m+n} 4\pi^2}{(n+r)(m-r)}, \quad n \neq -r, \; m \neq r, \tag{5}$$

$$A_{rmn} = \frac{1}{4\pi^2 [1 - R^2(\tau)]} e^{-\frac{2\gamma^2}{1+R(\tau)}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Z_1 Z_2 I_r\left(\frac{R(\tau) Z_1 Z_2}{1 - R^2(\tau)}\right) \times$$

$$\times I_m\left(\sqrt{2}\,\gamma \frac{Z_1}{1 + R(\tau)}\right) I_n\left(\sqrt{2}\,\gamma \frac{Z_2}{1 + R(\tau)}\right) e^{-\frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2(1 - R^2(\tau))}} dZ_1 dZ_2,$$

где $\gamma^2 = (V_{\text{п}}/V_{\text{р}})^2$; $V_{\text{р}}$ — множитель ослабления по напряжению составляющей рассеянного поля; I_r, I_m, I_n — бесселевы функции соответственно r-го, m-го и n-го порядков от мнимых аргументов; $R(\tau)$ — коэффициент корреляции, который при указанных статистических свойствах $A(t)$ и $B(t)$ равен

$$R(\tau) = \frac{\Psi_{AA}(\tau)}{\Psi_{AA}(0)}. \tag{6}$$

Интегрирование (5) приводит к громоздкому выражению для $\Psi_{\varepsilon_1}(\tau)$, которое в дальнейшем весьма трудно использовать при вычислении спектра перекрестных шумов. При

$$\gamma^2 \frac{1 - R(\tau)}{1 + R(\tau)} < 1, \tag{7}$$

как показано в [5], выражение для функции корреляции значительно упрощается и имеет вид

$$\Psi_{\varepsilon_1}(\tau) \simeq \frac{1}{2\Delta\omega_m^2} e^{-\frac{2\gamma^2}{1+R(\tau)}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(n + \frac{r}{2}\right)}{n!\,(n+r)!} R^{r+2n}(\tau), \tag{8}$$

где Γ — гамма-функция.

Зависимость (8) от $R(\tau)$ удовлетворительно аппроксимируется выражением

$$\Psi_{\varepsilon_1}(\tau) \simeq \frac{\pi^2}{3\Delta\omega_m^2} e^{-\gamma^2} R^{n_\gamma}(\tau), \tag{9}$$

$$n_\gamma = \frac{4}{3} e^{0{,}35\gamma^2}.$$

В случае чисто рассеянного поля на УКВ $n_\gamma = 4/3$; при одинаковой интенсивности постоянной и рассеянной составляющих поля $n_\gamma = 1{,}9$.

Для определения $R(\tau)$ необходимо согласно (6) найти корреляционную функцию $A(t)$. При сделанных в работе [1] предположениях эта

функция равна

$$\Psi_{AA'}(\tau) \sim B_{\text{п}}(\tau) \int\limits_V \Psi_z(\tau, T_{\text{з}}) \frac{f_{\text{пер}}(\alpha, \beta) f_{\text{пр}}(\alpha, \beta)}{R_{11}^2 R_{22}^2} \sigma dV. \qquad (10)$$

$$\Psi_z(\tau, T_{\text{з}}) = \overline{\cos\{\Delta\omega_m [S(t) - S(t - T_{\text{з}}) - S(t + \tau) + S(t + \tau - T_{\text{з}})]\}}, \qquad (11)$$

где σ — эффективное сечение рассеяния (коэффициенты рассеяния); $f_{\text{пер}}(\alpha, \beta)$, $f_{\text{пр}}(\alpha, \beta)$ — характеристики направленности по мощности соответственно передающей и приемной антенн; $B_{\text{п}}(\tau)$ — огибающая временного коэффициента корреляции рассеянного сигнала. Величины R_{11} и R_{22} понятны из рис. 1.

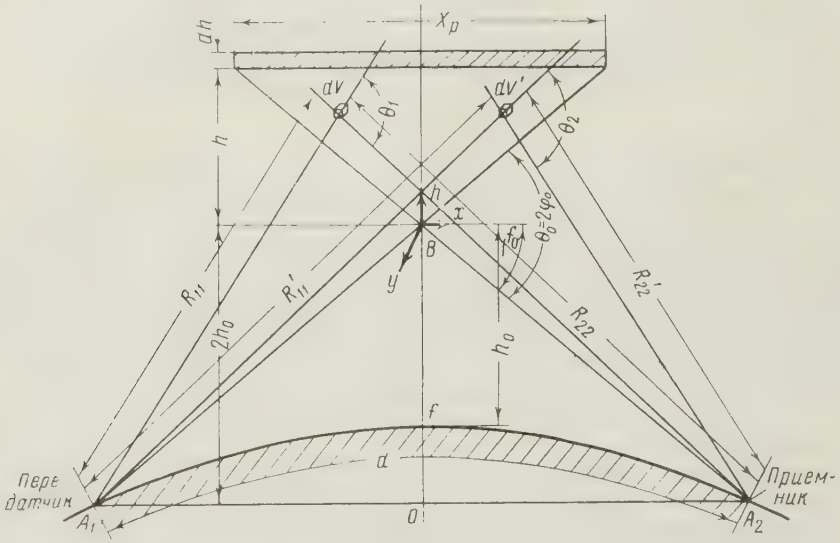


Рис. 1

Функция корреляции (11) равна [6]

$$\Psi_z(\tau, T_{\text{з}}) = e^{-m_{m\text{э}}^2 y_1(\tau)}, \qquad (12)$$

$$y_1(\tau) = \frac{4\Omega_2^2}{\Delta\Omega} \int\limits_{\Omega_1}^{\Omega_2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Omega T_{\text{з}}}{2}\right)}{\Omega} \right)^2 (1 - \cos\Omega\tau)\, d\Omega, \qquad (13)$$

где $m_{m\text{э}} = \frac{\Delta\omega_{m\text{э}}}{\Omega_2}$ — эффективный индекс модуляции; $\Delta\omega_{m\text{э}} = 2\pi\Delta f_{m\text{э}} = \Delta\omega_m \sqrt{\Psi_u(0)}$ ($\Delta f_{m\text{э}}$ — эффективная девиация частоты); $\Psi_u(0)$ — средняя мощность многоканального сообщения; $\Omega_2 = 2\pi F_2$; $\Omega_1 = 2\pi F_1$ (F_2, F_1 — верхняя и нижняя граничные частоты линейного спектра $u(t)$); $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$.

В линиях связи, использующих дальнее тропосферное распространение УКВ, весьма часто выполняется условие

$$\frac{\Omega_2 T_{\text{з}}}{2} \ll 1, \qquad (14)$$

которое соответствует случаю относительно небольших задержек постоянной составляющей поля, соизмеримых с задержками составляющих рассеянного поля. Ограничиваясь в дальнейшем условием (14) (методика

асчета переходных шумов при больших задержках постоянной волны ана в [1]), получим для (12)

$$\Psi_z(\tau, T_з) = \exp\left\{-\Delta\omega_{mэ}^2 T_з^2 \left(1 - \frac{\sin \Omega_2 \tau}{\Omega_2 \tau}\right)\right\}. \quad (15)$$

Произведение характеристик направленности передающей и приемной тенн в вертикальной плоскости аппроксимируем выражением

$$f_{пер}(\alpha) f_{пр}(\alpha) = \exp\left\{-1{,}38\left(\frac{h - n_x h_1}{h_1}\right)^2\right\}, \quad (16)$$

$$h_1 = \frac{\alpha_0 d}{4}, \quad (17)$$

.е α_0 — угловая ширина диаграмм направленности антенн в вертикальой плоскости; n_x — множитель, характеризующий ориентацию осей антенн относительно горизонта. При ориентации осей антенн на горизонт $= 0$; при ориентации осей антенн под углом $0{,}5\,\alpha_0$ к горизонту $n_x = 1$.

Коэффициент рассеяния и закон спадания интенсивности флуктуаций высотой определяются формулами (31) и (32) работы [1]. Общий характер этих формул позволяет установить в общем виде связь между перекрестными помехами и статистическими параметрами турбулентной тосферы.

Подставляя (7), (8), (31), (32) [1] и (15), (16) в (10) и сводя интегрирование по объему к интегрированию лишь по высоте [7], получим

$$\Psi_{AA}(\tau) \sim B_н(\tau) \int_0^\infty e^{-\left\{\left(\frac{\Delta\omega_{mэ} d}{CR_э}\right)^2 (1 + y(\tau))(h - h_c)^2 + \frac{1.38}{h_1^2}(h - n_x h_1)^2;\ \frac{a_x}{h_0^2}(h - b_x h_0)^2\right\}} dh =$$

$$= \Psi'_{AA}(\tau), \quad (18)$$

$$y(\tau) = \frac{\sin \Omega_2 \tau}{\Omega_2 \tau}; \quad h_c = \frac{\tau_{зп} CR_э}{d}; \quad (19)$$

$$a_x = \ln 2\,(1{,}4 e^{-0{,}33(p + 0{,}5 n_1 - 1)} - b_x)^{-2}; \quad (20)$$

$$b_x = (1 + p + 0{,}5\, n_1)^{-1}. \quad (21)$$

ормулы (20) и (21) справедливы в пределах

$$1 \leqslant (p - 0{,}5\, n_1) \leqslant 3{,}5. \quad (22)$$

(18) следует, что

$$\Psi_{AA}(0) \sim \int_0^\infty e^{-\left\{\frac{1.38}{h_1^2}(h - n_x h_1)^2 + \frac{a_x}{h_0^2}(h - b_x h_0)^2\right\}} dh = \Psi'_{AA}(0). \quad (23)$$

Подставляя (18), (23) и (6) в (9), получим

$$\Psi_{\varepsilon_1}(\tau) = \frac{\pi^2}{3\Delta\omega_m^2} e^{-\gamma^2} \Psi'^{-n_\gamma}_{AA}(0)\, \Psi'^{n_\gamma}_{AA}(\tau). \quad (24)$$

Разложим в подынтегральном выражении (18) экспоненциальный житель, содержащий $y(\tau)$, в степенной ряд:

$$e^{\left(\frac{\Delta\omega_{mэ} d}{CR_э}\right)^2 (h - h_c)^2 y(\tau)} = e^{A_1 y(\tau)} = 1 + \frac{A_1 y(\tau)}{1!} + \frac{A_1^2 y^2(\tau)}{2!} + \frac{A_1^3 y^3(\tau)}{3!}. \quad (25)$$

В дальнейшем ограничимся условием

$$A_1 = \left(\frac{\Delta\omega_{mэ} d}{CR_э}\right)^2 (h - h_c)^2 = (\Delta\omega_{mэ} T_з)^2 \leqslant 1, \quad (26)$$

которое аналогично ранее введенному условию (14). Поэтому в (25) оставим лишь три члена разложения. Тогда в соответствии с (18), (24) и (25) получим

$$\Psi_{AA}^{n_\gamma}(\tau) = B_{\text{н}}^{n_\gamma}(\tau)\,[a_{\text{к}} + b_{\text{к}} y(\tau) + C_{\text{к}} y^2(\tau)]^{n_\gamma}, \tag{27}$$

$$a_{\text{к}} = \int_0^\infty e^{-f(h,\,h_{\text{с}})}\,dh, \tag{28}$$

$$b_{\text{к}} = \frac{1}{1!}\left(\frac{\Delta\omega_{m\text{э}}\,d}{CR_{\text{э}}}\right)^2 \int_0^\infty e^{-f(h,\,h_{\text{с}})}\,(h - h_{\text{с}})^2\,dh, \tag{29}$$

$$C_{\text{к}} = \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta\omega_{m\text{э}}\,d}{CR_{\text{э}}}\right)^4 \int_0^\infty e^{-f(h,\,h_{\text{с}})}\,(h - h_{\text{с}})^4\,dh, \tag{30}$$

$$f(h,\,h_{\text{с}}) = \left[\left(\frac{\Delta\omega_{m\text{э}}\,d}{CR_{\text{э}}}\right)^2 (h - h_{\text{с}})^2 + \frac{1{,}38}{h_1^2}\,(h - n_x h_1)^2 + \frac{a_x}{h_0^2}\,(h - b_x h_0)^2\right]. \tag{31}$$

Экспериментальные исследования дальнего тропосферного распространения УКВ показали, что огибающая временно́го коэффициента корреляции рассеянного сигнала весьма медленно убывает со временем ($B_{\text{п}}(\tau)$ уменьшается в e раз, где e — основание натурального логарифма при τ, равном долям и единицам секунд). Следовательно, энергетический спектр создаваемых огибающей перекрестных помех будет сосредоточен в области нулевой частоты. Поэтому в дальнейшем в (27) отбросим множитель $B_{\text{н}}^{n_\gamma}(\tau)$.

Разлагая (27) в ряд Маклорена по степеням $y(\tau)$ и ограничиваясь в соответствии с (20) тремя членами разложения, получим

$$\Psi_{AA}^{n_\gamma}(\tau) = a_{\text{к}}^{n_\gamma} + \frac{1}{1!}\,n_\gamma a_{\text{к}}^{n_\gamma - 1} b_{\text{к}} y(\tau) + \frac{1}{2!}\,n_\gamma a_{\text{к}}^{n_\gamma - 2}\,[(n_\gamma - 1)\,b_{\text{к}}^2 + 2c_{\text{к}} a_{\text{к}}]\,y^2(\tau) + \cdots. \tag{32}$$

Первый член разложения в (32) не зависит от τ и поэтому не образует спектра. Второй член разложения в (32) представляет собой линейную часть функции корреляции, которая обусловливает нелинейные искажения, когерентные с основным сообщением. Следовательно, первый и второй члены в (32) не будут создавать перекрестных помех в каналах и их следует исключить из (24) при определении мощности перекрестных шумов.

3. МОЩНОСТЬ ПЕРЕКРЕСТНЫХ ШУМОВ

Подставив (2), (24) и (32) в (1) и осуществив интегрирование, получим формулу для псофометрической мощности перекрестных шумов в точке с нулевым относительным уровнем:

$$P_{\text{шт}} = \frac{\pi}{3}\,10^9 K_{\text{п}}^2 e^{-\gamma^2}\,\frac{\Delta F_{\text{к}} F_2}{\Delta f_{\text{к}}^2}\,\frac{m^2}{(1+m)^{2+0{,}5\,n_\gamma}}\,b_1^2\,(2 - b_1)\,f_1, \tag{33}$$

$$f_1 = \frac{e^{-mm_3^2 n_\gamma}\,A_1^{n_\gamma - 2}}{[2 - P(2m_1,\,1)]^{n_\gamma}}\,n_\gamma\,[(n_\gamma - 1)\,A_2^2 + 0{,}885\,A_1 A_3], \tag{34}$$

$$A_1 = [2 - P(2m_2^2,\,1)], \tag{35}$$

$$A_2 = 0{,}442\,[2 - P(2m_2^2,\,3)] + P(2m_2^2,\,2)\,m_3 + 0{,}884\,[2 - P(2m_2^2,\,1)]\,m_3^2, \tag{36}$$

$$A_3 = 0{,}665\,\{[2 - P(2m_2^2,\,5)] + 3P(2m_2^2,\,4)\,m_3 + 4\,[2 - P(2m_2^2,\,3)]\,m_3^2 + 3P(2m_2^2,\,2)\,m_3^3 + 1{,}33\,[2 - P(2m_2^2,\,1)]\,m_3^2\}. \tag{37}$$

В формулах (33) — (37) $\Delta f_к = \Delta f_{mэ} e^{-b_{ср}}$ — эффективная величина девиации частоты на канал; $b_{ср}$ — разность между уровнем средней мощности всех каналов и измерительным уровнем одного канала (в неперах); $= \Omega_к / \Omega_2$; Δf_2 — полоса пропускания тропосферы в случае использования направленных антенн:

$$\Delta f_2 = \Delta f_1 Q_1; \tag{38}$$

f_1 — полоса пропускания тропосферы в случае использования ненаправленных антенн:

$$\Delta f_1 = \frac{CR_э^2}{d^3}; \tag{39}$$

— множитель, учитывающий влияние направленности антенн на полосу пропускания тропосферы:

$$Q = \sqrt{a_x + \frac{1{,}38}{a^2}}; \tag{40}$$

$= \alpha_0 / \varphi_0$; $P(\chi^2, n)$ — функция вероятности χ^2; φ_0 — половина нулевого угла рассеяния;

$$m = 0{,}62 \left(\frac{\Delta f_{mэ}}{\Delta f_2} \right)^2; \tag{41}$$

$$m_1 = 1{,}38 \frac{\left(n_x + \frac{a_x b_x}{1{,}38} a \right)^2}{1 + \frac{a_x}{1{,}38} a^2}; \tag{42}$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{m_1}{1+m}} \left(1 + m \frac{h_c}{m_4} \right); \tag{43}$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{m_1}{(1+m)}} \left(1 - \frac{h_c}{m_4} \right); \tag{44}$$

$$m_4 = \frac{1{,}38\, h_1}{a} \frac{1}{Q_1}; \tag{45}$$

$$Q_1 = \frac{1{,}38 + a_x a^2}{a n_x + \frac{a_x b_x}{1{,}38} a^2}. \tag{46}$$

Формула (33) справедлива при выполнении условий (14) и (7). Минимальная величина интенсивности составляющей постоянного поля определяется из условия $V_п^2 > V_{рн}^2$, где $V_{рн}^2$ — интенсивность поля, рассеянного наиболее активной турбулентной неоднородностью в объеме рассеяния (т. е. неоднородностью, создающей наибольшую величину рассеянного поля в месте приема по сравнению с другими неоднородностями). При $V_п = 0$ и $h_c = 0$ формула (33) определяет величину переходных помех, возникающих при распространении радиоволн за счет рассеяния.

Для качественного анализа перекрестных искажений, возникающих при взаимодействии постоянного и рассеянного полей, получим более простую формулу для мощности переходных шумом. Интегрируя (18) и учитывая (16) и (9), будем иметь

$$\Psi_{\varepsilon_1}(\tau) = \frac{\pi^2}{3\Delta\omega_m^2} e^{-\gamma^2 B_н(\tau)} \exp\{- m_5 m_6 m_7\}, \tag{47}$$

$$m_5 = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{\Delta f_{mэ}}{\Delta f_2} \right)^2 (1 - y(\tau)), \tag{48}$$

$$m_6 = 0{,}99\, m_1 n_\gamma, \tag{49}$$

$$m_7 = 1 - \frac{h_c}{m_4} = 1 - \frac{h_c a Q_1}{1{,}38\, h_1}. \tag{50}$$

Формула (47) получена при условии, что m_5 и $m_5 \frac{h_c}{m_4}$ существенно меньше единицы. Второе условие является более жестким и его весьма трудно удовлетворить, особенно при ориентации осей антенн на горизонт.

Выделяя в формуле (47) когерентные члены перекрестных искажений (методика выделения когерентных членов примерно аналогична вышерассмотренной методике) и отбрасывая, как и раньше, функцию $B_{\text{п}}(\tau)$, получим в соответствии с (1), (2) и (47) следующее выражение для псофометрической мощности перекрестных шумов в точке с нулевым относительным уровнем:

$$P_{\text{шт}} = 2 \cdot 10^9 K_{\text{п}}^2 \rho^{-0,3\gamma^2} \frac{\Delta F_{\text{к}} F_2}{\Delta f_{\text{к}}^2} \left(\frac{\Delta f_{m\text{э}}}{\Delta f_2'} \right)^4 \times$$

$$\times e^{-\left[1,57 \left(\frac{\Delta f_{m\text{э}}}{\Delta f_2'}\right)^2 e^{0,35\gamma^2} m_7^2\right]} m_7^4 b_1^2 (2 - b_1) nbm, \qquad (51)$$

где $\Delta f_2'$ — полоса пропускания тропосферы в случае использования направленных антенн:

$$\Delta f_2' = \Delta f_1 Q_1; \qquad (52)$$

Q_1 — множитель, учитывающий возрастание полосы пропускания тропосферы с увеличением направленности антенн [см. (46)].

Из формулы (51) следует, что минимальная величина перекрестных шумов будет при условии $m_7 = 0$. Количественно минимальную величину переходных шумов следует определять по формуле (33), так как формула (51) не учитывает величины второго порядка малости.

При рассеянном распространении УКВ (т. е. при $\gamma^2 = 0$, $h_c = 0$) формулу (51) можно также использовать и для количественных расчетов, но по сравнению с формулой (33) она дает несколько заниженную (примерно на 2 *дб*) величину мощности переходных шумов.

4. ЗАВИСИМОСТЬ МОЩНОСТИ ПЕРЕКРЕСТНЫХ ШУМОВ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Исследование зависимости перекрестных искажений от положения канала в линейном спектре многоканального сообщения показало, что максимальная мощность переходных шумов будет в канале с частотой $\Omega_{\text{к}} \simeq \frac{4}{3} \Omega_2$. Следовательно, расчет переходных шумов необходимо производить для самого верхнего канала, т. е. для $b_1 = 1$.

Из формул (33) и (51) следует, что мощность перекрестных шумов обратно пропорциональна четвертой степени полосы пропускания тропосферы, которая в работе [8] определяется на основании переходных характеристик тропосферы. Следовательно, полученные формулы устанавливают связь между величиной переходных шумов и полосой пропускания тропосферы, определяемой на основании переходных характеристик среды.

На рис. 2 даны зависимости Q^2 от a для ряда значений p и n_1. С ростом направленности антенн множитель Q и, следовательно, полоса пропускания тропосферы быстро возрастают. В области $0,4 \leqslant a \leqslant 1,5$ на величину множителя Q значительное влияние оказывают статистические характеристики турбулентной тропосферы, причем с ростом p и n_1 величина Q также возрастает. Поскольку существующие системы связи, использующие дальнее тропосферное распространение УКВ, работают в указанном диапазоне a, при расчете переходных шумов необходимо учитывать статистические параметры тропосферы.

В таблице и на рис. 3 приведены зависимости f_1 и $P_{шт}$ от h_c/h_1 ия $a=1$ и $a=0{,}25$; $n_\gamma=4/3$ (случай малой интенсивности постоянной олны) и $n_\gamma=1{,}9$ (случай, когда $V_п^2=V_р^2$); $n_x=0$ (случай ориентации ей антенн на горизонт) и $n_x=1$ (случай ориентации осей антенн од углом 0,5 α_0 к горизонту). При расчетах принималось $=300$ *км*, $R_э=8500$ *км*, $c=300\,000$ *км/сек*, число телефонных кана-ов $N=120$, $p=1$ и $n_1=2$ (выбранные величины p и n_1 позволяют авнительно легко объяснить экспериментально наблюдаемые величины оля за горизонтом). Зависимость $P_{шт}$ и f_1 от h_c/h_1 имеет резонансный

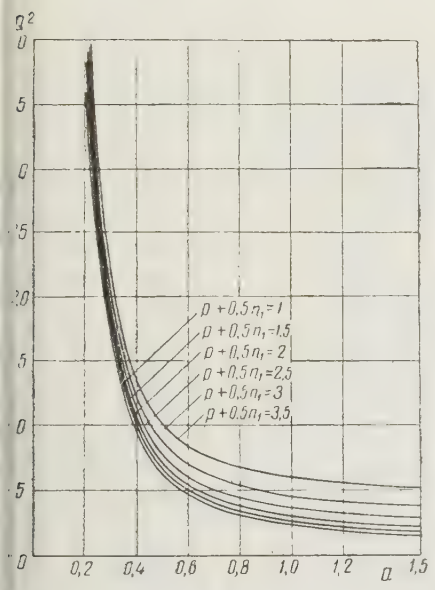


Рис. 2

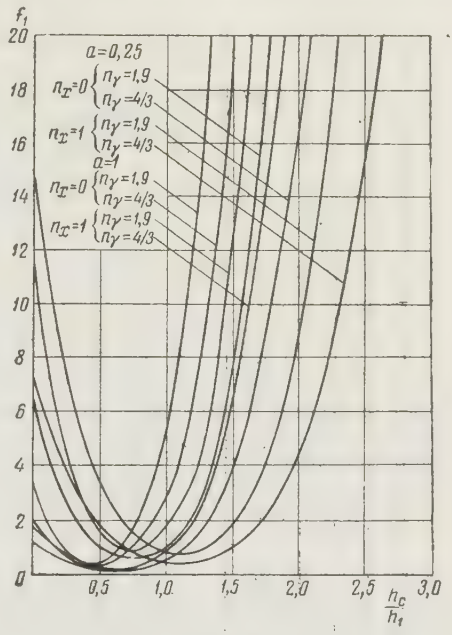


Рис. 3

рактер, причем существует оптимальное отношение h_c/h_1, при кото-м величина переходных шумов будет минимальной. Например, при $=1$, $n_x=1$ величина $P_{шт}$ минимальна при $h_c/h_1=0{,}81$, причем это ношение практически не зависит от n_γ, т. е. соотношения между со-авляющими постоянного и рассеян-го полей. Существование оптиму-. $P_{шт}=f(h_c/h_1)$ можно объяснить мметричным расположением состав-яющих рассеянного поля относи-льно составляющей постоянного оля, что при постоянных амплиту-х лучей рассеянного поля приво-т к линейной фазовой характери-ике среды распространения.

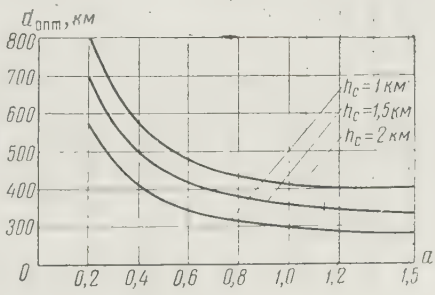


Рис. 4

Наличие волны постоянной интен-вности с соответствующей задерж-й существенно снижает величину реходных шумов. Так, например, при $a=1$, $n_x=1$ при чисто рас-инном распространении УКВ $P_{шт}=290\cdot10^3$ *пвт*, а при $n=1{,}9$ величина реходных шумов в минимуме составляет всего лишь $P_{шт}=130\cdot10^2$ *пвт*, е. величину, в 22 раза меньшую.

При уменьшении угла ориентации осей антенн относительно гори-нта, во-первых, уменьшается величина оптимального отношения h_c/h_1

Таблица

$a=0{,}25$												$a=1$											
$n_x=0$						$n_x=1$						$n_x=0$						$n_x=1$					
$n_\gamma=4/3$			$n_\gamma=1{,}9$			$n_\gamma=4/3$			$n_\gamma=1{,}9$			$n_\gamma=4/3$			$n_\gamma=1{,}9$			$n_\gamma=4/3$			$n_\gamma=1{,}9$		
$\frac{h_c}{h_1}$	f_1	$P_{шт}$	$\frac{h_c}{h_1}$	f_1	$P_{шт}$	$\frac{h_c}{h_1}$	f_1	$P_{шт}$	$\frac{h_c}{h_1}$	f_1	$P_{шт}$	$\frac{h_c}{h_1}$	f_1	$P_{шт}$	$\frac{h_c}{h_1}$	f_1	$P_{шт}$	$\frac{h_c}{h_1}$	f_1	$P_{шт}$	$\frac{h_c}{h_1}$	f_1	$P_{шт}$
0	1,2	$12\cdot10^2$	0	2,0	740	0	7,1	$72\cdot10^2$	0	14	$51\cdot10^2$	0	2,1	$95\cdot10^3$	0	3,3	$48\cdot10^3$	0	6,4	$29\cdot10^4$	0	11	$16\cdot10^4$
0,043	1,0	10^3	0,043	1,7	630	0,26	3,6	$37\cdot10^2$	0,26	7,0	$25\cdot10^2$	0,044	1,7	$78\cdot10^3$	0,044	2,7	$39\cdot10^3$	0,16	3,7	$17\cdot10^4$	0,16	6,3	$92\cdot10^3$
0,086	0,87	880	0,086	1,5	530	0,51	1,7	$18\cdot10^2$	0,51	3,2	$12\cdot10^2$	0,088	1,4	$63\cdot10^3$	0,088	2,1	$31\cdot10^3$	0,32	1,9	$88\cdot10^3$	0,32	3,3	$47\cdot10^3$
0,13	0,74	750	0,13	1,2	440	0,77	0,79	$8\cdot10^2$	0,77	1,4	520	0,13	1,1	$5\cdot10^4$	0,13	1,7	$25\cdot10^3$	0,49	1,0	$45\cdot10^3$	0,49	1,7	$24\cdot10^3$
0,17	0,62	630	0,17	1,0	370	1,0	0,43	430	1,0	0,77	280	0,22	0,71	$32\cdot10^3$	0,22	1,1	$16\cdot10^3$	0,65	0,57	$26\cdot10^3$	0,65	0,96	$14\cdot10^3$
0,26	0,44	450	0,26	0,71	260	1,3	0,48	480	1,3	0,89	320	0,31	0,45	$2\cdot10^4$	0,31	0,68	$98\cdot10^2$	0,81	0,54	$24\cdot10^3$	0,81	0,92	$13\cdot10^3$
0,30	0,37	380	0,30	0,60	220	1,5	1,0	10^3	1,5	1,9	$7\cdot10^2$	0,35	0,37	$17\cdot10^3$	0,35	0,56	$8\cdot10^3$	0,97	0,97	$44\cdot10^3$	0,97	1,7	$24\cdot10^3$
0,40	0,25	250	0,40	0,39	140	1,8	2,3	$24\cdot10^2$	1,8	4,6	$16\cdot10^2$	0,39	0,30	$14\cdot10^3$	0,39	0,47	$68\cdot10^2$	1,1	1,4	$66\cdot10^3$	1,1	2,8	$4\cdot10^4$
0,60	0,13	140	0,60	0,22	79	2,0	5,0	$5\cdot10^3$	2,0	9,9	$36\cdot10^2$	0,44	0,27	$12\cdot10^3$	0,44	0,42	$61\cdot10^2$	1,3	2,9	$13\cdot10^4$	1,3	5,6	$81\cdot10^3$
0,65	0,13	130	0,65	0,22	79	2,3	9,7	$98\cdot10^2$	2,3	20	$72\cdot10^2$	0,48	0,26	$12\cdot10^3$	0,48	0,41	$59\cdot10^2$	1,6	9,9	$45\cdot10^4$	1,6	1,8	$28\cdot10^4$
0,69	0,13	130	0,69	0,23	82	2,6	17	$17\cdot10^3$	2,6	36	$13\cdot10^3$	0,52	0,27	$12\cdot10^3$	0,52	0,44	$63\cdot10^2$	1,9	25	$12\cdot10^5$	1,9	46	$66\cdot10^4$
0,80	0,20	$2\cdot10^2$	0,80	0,38	140	2,8	29	$29\cdot10^3$	2,8	61	$22\cdot10^3$	0,61	0,39	$18\cdot10^3$	0,61	0,64	$92\cdot10^2$	2,3	49	$22\cdot10^5$	2,3	88	$13\cdot10^5$
0,90	0,28	290	0,90	0,52	190	3,1	51	$52\cdot10^3$	3,1	97	$35\cdot10^3$	0,7	0,8	$36\cdot10^3$	0,7	1,4	$2\cdot10^4$	2,4	64	$29\cdot10^5$	2,4	110	$16\cdot10^5$
1,0	0,47	480	1,0	0,87	310	3,3	70	$7\cdot10^4$	3,3	150	$54\cdot10^3$	1,0	2,8	$13\cdot10^4$	1,0	5,3	$77\cdot10^3$	2,6	81	$37\cdot10^5$	2,6	140	$20\cdot10^5$
2,0	17	$17\cdot10^3$	2,0	33	$12\cdot10^3$	3,6	10^2	10^5	3,6	220	$79\cdot10^3$	2,0	56	$25\cdot10^5$	2,0	110	$16\cdot10^5$	3,0	140	$64\cdot10^5$	3,0	220	$31\cdot10^5$
3,0	120	$12\cdot10^4$	3,0	240	$87\cdot10^3$	3,8	150	$15\cdot10^4$	3,8	310	$11\cdot10^4$	3,0	170	$79\cdot10^5$	3,0	250	$37\cdot10^5$	3,5	$2\cdot10^2$	$99\cdot10^5$	3,5	270	$4\cdot10^6$
4,0	470	$47\cdot10^4$	4,0	950	$34\cdot10^4$	4,0	$2\cdot10^2$	$2\cdot10^5$	4,0	430	$15\cdot10^4$	4,0	210	$98\cdot10^5$	4,0	220	$32\cdot10^5$	4,0	230	$11\cdot10^6$	4,0	260	$38\cdot10^5$

во-вторых, существенным образом снижается величина $P_{шт}$. Напри-
ер, при $a = 0{,}25$, $n_x = 1$, $n_\gamma = 1{,}9$ оптимальное отношение $h_c / h_1 = 0{,}65$
$P_{шт} = 280$ *квт*, а при $n_x = 0$ $h_c / h_1 = 1$ и $P_{шт} = 79$ *квт*.

Из формул (33), (34), (50) и (51) следует, что при неизменной величине
ременно́й задержки волны постоянной интенсивности можно таким обра-
ом подобрать параметры линии связи, чтобы величина переходных по-
ех была минимальной. Такими параметрами являются длина трассы, на-
равленность передающей и приемной антенн и углы ориентации осей
нтенн относительно горизонта. Из (50), (51) следует, что оптимальная
лина трассы равна

$$d_{опт} = \sqrt{5{,}8\, h_c R_э Q_1}. \qquad (53)$$

Последняя формула дает удовлетворительные количественные резуль-
аты в случае ориентации осей антенн под углом 0,5 α_0 к горизонту. При
риентации осей антенн на горизонт определение оптимальных парамет-
ов необходимо проводить на основании формулы (33). На рис. 4 приве-
ена зависимость $d_{опт} = f(a)$ при $p = 1$, $n_1 = 2$, $R_э = 8500$ *км*, $n_x = 1$
ля трех значений h_c. С ростом задержки составляющей постоянного поля
с увеличением направленности антенн оптимальная длина трассы воз-
астает.

ВЫВОДЫ

1. В многоканальных линиях связи с частотной модуляцией и уплот-
нением каналов по частоте, использующих дальнее тропосферное распро-
транение УКВ, наибольшая величина переходных шумов имеет место
ри рассеянном распространении радиоволн на турбулентных неодно-
одностях тропосферы. При этом механизме распространения пе-
рекрестные помехи очень быстро возрастают с увеличением длины
рассы.

2. Наличие в месте приема (помимо составляющей рассеянного поля)
ставляющей поля постоянной интенсивности с относительно небольшой
ременно́й задержкой уменьшает величину перекрестных искажений.
ри таком смешанном механизме распространения радиоволн имеется воз-
ожность (при известных статистических параметрах тропосферы) подоб-
ать параметры системы связи таким образом, чтобы получить минималь-
ую величину переходных шумов. Зависимость переходных шумов от
асстояния имеет резонансный характер, причем существует оптимальное
асстояние между передатчиком и приемником, при котором перекрест-
ые шумы минимальны.

3. Статистические характеристики тропосферы оказывают существен-
ое влияние на величину перекрестных искажений. Поэтому для более
очного расчета мощности переходных шумов необходимо иметь исчерпы-
ающие экспериментальные данные о статистических характеристиках
ропосферы, т. е. данные о функции корреляции турбулентных неодно-
одностей диэлектрической проницаемости воздуха, масштабе турбулент-
ых неоднородностей, законе спадания интенсивностей неоднородностей
высотой и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

А. В. Просин, К теории перекрестных искажений при дальнем тропосферном распространении УКВ, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 7, 1052.

А. В. Просин, О влиянии статистических характеристик турбулентной тропосферы на рассеянное распространение ультракоротких волн, НДВШ (Радиотехника и электроника), 1959, 1, 43.

А. В. Просин, К расчету перекрестных искажений при многолучевом распространении радиоволн, НДВШ (Радиотехника и электроника), 1959, 1, 53.

Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Изд. Советское радио, 1957.

5. И. А. Гусятинский, Искажения сигнала при распространении УКВ за пределами прямой видимости, Сб. трудов НИИ МС СССР, 1959, 1(15), 15.
6. А. В. Просин, Перекрестные шумы, возникающие в радиорелейных линиях связи с частотной модуляцией вследствие многолучевого распространения радиоволн или несогласованностей и неоднородностей антенных фидеров, Сб. трудов Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова, 1958, вып. II, 168.
7. А. В. Просин, К расчету мощности рассеяния при дальнем тропосферном распространении ультракоротких волн, Электросвязь, 1958, 8, 13.
8. А. В. Просин, Об искажениях передачи при рассеянном распространении ультракоротких волн, Электросвязь, 1959, 5, 32.

Поступила в редакцию
16 VII 1960

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР СИГНАЛА, ПОЛУЧАЕМОГО ПОСРЕДСТВОМ РАЗВЕРТКИ

Н. К. Игнатьев

Установлена зависимость энергетического спектра сигнала от многомерных статистических свойств сообщения, из которого этот сигнал получен посредством развертки. Полученные решения непосредственно применимы в технике телевидения, фототелеграфии и радиолокации.

ВВЕДЕНИЕ

В радиотехнике встречаются случаи преобразования информации, которых сигнал образуется посредством развертки, как, например, в телевидении, фототелеграфии и радиолокации. Наличие развертки значительно усложняет спектры соответствующих сигналов и в то же время приводит к определенной закономерности их построения, которая должна учитываться во всех попытках уплотнения полосы частот, занимаемой сигналом. Наибольший интерес с этой точки зрения представляет определение энергетического спектра сигнала.

Поскольку же во всех трех упомянутых областях применения спектральные свойства сигнала определяются наличием развертки, то методы их исследования аналогичны друг другу, и поэтому целесообразно, используя эту аналогию, рассмотреть их совместно.

1. ЗОНДИРУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ

В рассматриваемых системах сообщение, представляющее собой функцию двух или трех переменных, посредством развертки преобразуется в функцию времени, называемую сигналом [1]. Развертка осуществляется движущимся зондирующим элементом, периодически обегающим пространство сообщения. В радиолокации роль зондирующего элемента играет распространяющийся в пространстве «пакет» волн, в фототелеграфии — сечение светового луча, выделяющего элемент изображения, и, наконец, в телевидении эту роль выполняют сечение электронного луча, обегающего мишень, и инерционность мишени.

Зондирующий элемент обычно имеет конечные размеры во всех измерениях пространства сообщения. Поэтому получаемый сигнал лишь с некоторым приближением пропорционален действительным изменениям отражающей способности или яркости анализируемого объекта. В данном случае действие зондирующего элемента эквивалентно действию фильтра нижних частот, обобщенного на соответствующее число измерений [1].

Таким образом, можно считать, что процессу развертки предшествует низкочастотная фильтрация. Если действие зондирующего элемента в измерениях x, y и t можно охарактеризовать весовой функцией $G_1(x, y, t)$ *, в результате этой фильтрации функция $F_1(x, y, t)$, характеризующая исходное сообщение, преобразуется в функцию

$$F(x, y, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F_1(\chi, \nu, \vartheta)\, G_1(x - \chi, y - \nu, t - \vartheta)\, d\chi\, d\nu\, d\vartheta.$$

* В телевидении роль такой функции может играть произведение из функции определения плотности тока в сечении электронного луча, обегающего мишень, на переходную функцию, характеризующую инерционность мишени.

Учитывая таким способом фильтрующее действие зондирующего элемента, можно считать, что дальнейшее преобразование функции $F(x, y, t)$ сводится к «чистой» развертке бесконечно малым зондирующим элементом. Весовую функцию такого «идеального» зондирующего элемента можно выразить при помощи дельта-функций как

$$G(x, y, t) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t).$$

Поскольку в каждом конкретном случае реальная весовая функция зондирующего элемента известна и влияние ее на исходное сообщение и его статистические свойства можно сравнительно легко определить, то в дальнейшем будем считать, что речь идет лишь о развертке преобразованной функции $F(x, y, t)$ идеальным зондирующим элементом.

2. ДЕЙСТВИЕ РАЗВЕРТКИ

В телевидении имеет место развертка изображения $F(x, y, t)$, являющегося функцией двух пространственных координат x и y, а также времени t. Размеры развертываемой поверхности всегда ограничены и поэтому можно считать, что

$$|x| \leqslant \frac{X}{2}; \quad |y| \leqslant \frac{Y}{2}.$$

Легко видеть, что в этом случае функция

$$D_R(x, y, t, \tau) = \sum_{k_1} \delta\left[x - X\left(\frac{\tau}{T_1} + k_1\right)\right] \sum_{k_2} \delta\left[y - Y\left(\frac{\tau}{T_2} + k_2\right)\right] \delta(t - \tau) \quad (1)$$

описывает закон перемещения идеального зондирующего элемента в пространстве переменных x, y, t в зависимости от текущего времени τ [2]. Здесь T_1 — период развертки в направлении оси x (т. е. время развертки строки); T_2 — период развертки в направлении оси y (т. е. время развертки поля). В дальнейшем эту функцию будем называть дискретизирующей.

Умножая исходную функцию $F(x, y, t)$ на дискретизирующую (1) и производя интегрирование, получим последовательность выделенных значений этой функции, образующих функцию времени (сигнал)

$$f(\tau) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(x, y, t)\, D_R(x, y, t, \tau)\, dx\, dy\, dt. \quad (2)$$

В фототелеграфии можно считать, что имеет место передача изображения в виде бесконечной ленты, ширина которой укладывается в пределах $|x| \leqslant |X|/2$ и которая перемещается вдоль оси y со скоростью $v = y/t$. В результате передаваемое изображение может рассматриваться как функция $F(x, t)$, а закон движения идеального зондирующего элемента в процессе развертки можно представить при помощи дискретизирующей функции

$$D_R(x, t, \tau) = \sum_{k} \delta\left[x - X\left(\frac{\tau}{T} + k\right)\right] \delta(t - \tau), \quad (3)$$

где T — период развертки строки [2].

Аналогично предыдущему случаю полученный фототелеграфный сигнал выразится как

$$f(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(x, t)\, D_R(x, t, \tau)\, dx\, dt. \quad (4)$$

Пусть радиолокатор зондирует пространство вдоль координаты x, причем, вследствие перемещения целей, либо перемещения радиолокатора, характер эхо-сигналов зависит от времени t. Это значит, что происходит развертка функции $F(x, t)$. Очевидно, что если за период повторения импульсов радиолокатора T зондирующий пакет волн проходит дистанцию X, то соответствующий закон движения зондирующего элемента выразится той же формулой (3), что и в предыдущем случае. Если пренебречь тем обстоятельством, что интенсивность эхо-сигналов падает с расстоянием до объекта, или считать, что используется быстродействующая автоматическая регулировка усиления сигнала, то полученный сигнал можно также выразить формулой (4).

Таким образом, закономерности преобразования двухмерной функции в одномерную в технике фототелеграфии и радиолокации одинаковы, и в то же время они являются частными случаями более общего вида преобразования трехмерной функции, имеющего место в телевидении.

3. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Предположим, что функция $F(x, y, t)$, подвергаемая развертке, представляет собой случайный стационарный процесс *, для которого известна двухмерная функция распределения $\Phi(u_1, u_2; x_1, x_2; y_1, y_2; t_1, t_2)$, где u_1 и u_2 — значения функции $F(x, y, t)$ в точках (x_1, y_1, t_1) и (x_2, y_2, t_2). Положив $\chi = x_2 - x_1$, $\nu = y_2 - y_1$ и $\vartheta = t_2 - t_1$, в силу стационарности процесса можно написать

$$\Phi(u_1, u_2; x_1, x_2; y_1, y_2; t_1, t_2) = \Phi(u_1, u_2; \chi, \nu, \vartheta).$$

Зная последнее выражение функции распределения, можно дать определение трехмерной корреляционной функции

$$B(\chi, \nu, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int u_1 u_2 \Phi(u_1, u_2; \chi, \nu, \vartheta) du_1, du_2, \qquad (5)$$

являющееся естественным обобщением определения одномерной корреляционной функции.

Если функцию $F(x, y, t)$, имеющую указанные статистические характеристики, посредством развертки преобразовать в функцию времени, то последняя будет иметь функцию распределения $\varphi(u_1, u_2, \tau)$, зависящую лишь от смещения рассматриваемых точек во времени τ, и соответствующую корреляционную функцию

$$b(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int u_1, u_2 \varphi(u_1, u_2, \tau)\, du_1\, du_2. \qquad (6)$$

Легко прийти к заключению, что если развертка осуществляется в соответствии с дискретизирующей функцией $D_R(x, y, t, \tau)$, то связь между смещениями χ, ν, ϑ в трехмерном пространстве, с одной стороны, и смещением τ в одномерном пространстве, с другой стороны, будет определяться аналогичной дискретизирующей функцией $D_R(\chi, \nu, \vartheta, \tau)$,

* Предположение о стационарности рассматриваемого процесса, означающее, что его функция распределения не зависит от координат, в которых этот процесс задан, может быть оправдано тем, что в каждом частном случае трудно даже указать причину, по которой может возникнуть указанная зависимость, нарушающая условие стационарности. Если же в каком-то случае подобная причина и будет иметь место, то процесс приобретет нестационарную составляющую, и результаты проведенного здесь анализа, оставаясь справедливыми только для его стационарной составляющей, в более широком смысле окажутся приближениями.

а поэтому аналогично выражению (2) будем иметь

$$\varphi(u_1, u_2, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \Phi(u_1, u_2; \chi, \nu, \vartheta)\, D_R(\chi, \nu, \vartheta, \tau)\, d\chi\, d\nu\, d\vartheta. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и учитывая соотношение (5), получим

$$b(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int B(\chi, \nu, \vartheta)\, D_R(\chi, \nu, \vartheta, \tau)\, d\chi\, d\nu\, d\vartheta. \qquad (8)$$

Очевидно, что для техники фототелеграфии и радиолокации аналогичным образом будем иметь корреляционную функцию

$$b(\tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int B(\chi, \vartheta)\, D_R(\chi, \vartheta, \tau)\, d\chi\, d\vartheta. \qquad (9)$$

Таким образом, корреляционную функцию сигнала, полученного в результате развертки, можно найти как результат развертки корреляционной функции исходного сообщения.

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Как известно, энергетический спектр сигнала связан с корреляционной функцией соотношением

$$w(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau. \qquad (10)$$

Аналогичным образом можно определить энергетические спектры трехмерного и двухмерного сообщений:

$$W(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int B(\chi, \nu, \vartheta)\, e^{-i(\omega_1\chi + \omega_2\nu + \omega_3\vartheta)}\, d\chi\, d\nu\, d\vartheta, \qquad (11)$$

$$W(\omega_1, \omega_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int B(\chi, \vartheta)\, e^{-i(\omega_1\chi + \omega_2\vartheta)}\, d\chi\, d\vartheta. \qquad (12)$$

Введем понятия дискретизирующих функций в спектральной области: трехмерной $D_S(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega)$ и двухмерной $D_S(\omega_1, \omega_2, \omega)$, которые удовлетворяют условиям

$$w(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int W(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\, D_S(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega)\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3, \qquad (13)$$

$$w(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int W(\omega_1, \omega_2)\, D_S(\omega_1, \omega_2, \omega)\, d\omega_1\, d\omega_2. \qquad (14)$$

Подставляя (8) в (10) и приравнивая полученный результат соотношению (13), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int B(\chi, \nu, \tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_R(\chi, \nu, \vartheta, \tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau\, d\chi\, d\nu\, d\vartheta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\int W(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\, D_S(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega)\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3.$$

Подставляя сюда значение $B(\chi, \nu, \vartheta)$, полученное из (11), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int W(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\, e^{i(\omega_1\chi+\omega_2\nu+\omega_3\vartheta)}\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} D_R(\chi, \nu, \vartheta, \tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau\, d\chi\, d\nu\, d\vartheta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int W(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\, D_S(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega)\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3.$$

Дифференцируя обе части этого выражения по ω_1, ω_2, ω_3 и производя соответствующие сокращения, получим

$$D_S(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\int\int D_R(\chi, \nu, \vartheta, \tau)\, e^{i(\omega_1\chi+\omega_2\nu+\omega_3\vartheta-\omega\tau)}\, d\chi\, d\nu\, d\vartheta\, d\tau. \quad (15)$$

Подставляя (9) в (10) и приравнивая полученный результат соотношению (14), совершенно аналогично предыдущему случаю получим

$$D_S(\omega_1, \omega_2, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int D_R(\chi, \vartheta, \tau)\, e^{i(\omega_1\chi+\omega_2\vartheta-\omega\tau)}\, d\chi\, d\vartheta\, d\tau. \quad (16)$$

Подставляя (1) в (15) и (3) в (16), после интегрирования получим окончательные выражения соответствующих дискретизирующих функций в спектральной области:

$$D_S(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega) = \frac{1}{XY}\sum_{m_1}\delta\left(\omega_1 - m_1\frac{2\pi}{X}\right)\sum_{m_2}\delta\left(\omega_2 - m_2\frac{2\pi}{Y}\right) \times$$

$$\times\, \delta\left(\omega_3 - \omega + m_1\frac{2\pi}{T_1} + m_2\frac{2\pi}{T_2}\right), \quad (17)$$

$$D_S(\omega_1, \omega_2, \omega) = \frac{1}{X}\sum_{m}\delta\left(\omega_1 - m\frac{2\pi}{X}\right)\delta\left(\omega_2 - \omega + m\frac{2\pi}{T}\right). \quad (18)$$

Подставляя далее (17) в (13), после интегрирования получим общее выражение для энергетического спектра телевизионного сигнала

$$w(\omega) = \frac{1}{XY}\sum_{m_1}\sum_{m_2} W\left(m_1\frac{2\pi}{X},\ m_2\frac{2\pi}{Y},\ \omega - m_1\frac{2\pi}{T_1} - m_2\frac{2\pi}{T_2}\right). \quad (19)$$

Аналогично, подставляя (18) в (14), после интегрирования получим общее выражение энергетического спектра фототелеграфного или радиолокационного сигналов

$$w(\omega) = \frac{1}{X}\sum_{m} W\left(m\frac{2\pi}{X},\ \omega - m\frac{2\pi}{T}\right). \quad (20)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из полученных соотношений (19) и (20), подобно тому как посредством развертки из трехмерного (или двухмерного) сообщения образуется одномерный сигнал, так и в спектральной области посредством последовательного обхода точек с различной плотностью энергии из трех-

мерного (или двухмерного) энергетического спектра образуется одномерный энергетический спектр.

Чем глубже корреляционные связи внутри сообщения, тем больше концентрируется его энергия в начале координат спектрального пространства. Это ведет к тому, что энергетический спектр сигнала, являющийся результатом многократного, почти периодического зондирования этого пространства, приобретает характерную структуру, близкую к периодической. Так, в соответствии с формулой (19), энергетический спектр телевизионного сигнала приобретает максимумы на частотах, кратных $2\pi/T_1$ и $2\pi/T_2$, а в соответствии с формулой (20) энергетические спектры фототелеграфного и радиолокационного сигналов приобретают максимумы на частотах, кратных $2\pi/T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Игнатьев, Дискретизация многомерных сообщений, НДВШ (Радиотехника и электроника), 1958, 1, 63.
2. Н. К. Игнатьев, Частотный спектр развертки n-мерных сообщений, Электросвязь, 1959, 6, 74.

Поступила в редакцию
26 XII 1959

1961 № 1

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ И КОНЦЕПЦИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЛУЧЕЙ

Л. А. Вайнштейн, А. А. Федоров

Исследована дифракция цилиндрических и плоских волн на идеально отражающем эллиптическом цилиндре, поперечные размеры и радиусы кривизны которого велики по сравнению с длиной волны. Строгое решение этой дифракционной задачи получено в виде ряда и контурного интеграла, которые при подстановке асимптотических выражений для радиальных и угловых функций эллиптического цилиндра приводят к специальным функциям (множителям ослабления), введенным В. А. Фоком. Асимптотическое решение, получаемое таким путем, соответствует концепции дифракционных лучей Дж. Б. Келлера и легко обобщается на выпуклый цилиндр произвольной формы. Тем самым эта концепция получает (применительно к задачам данного типа) дополнительное обоснование и вместе с тем некоторое обобщение; в частности, полученные формулы позволяют исследовать преобразование дифракционных лучей в обычные и наоборот.

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние теории дифракции электромагнитных волн на выпуклых проводящих телах определяется фундаментальными работами В. А. Фока [1—7]. В частности, в этих работах введены (посредством контурных интегралов) специальные функции—множители ослабления, определяющие дифракционное поле при различных расположениях источника и точки наблюдения. Эти функции первоначально относились к области полутени. В освещенной области они переходят в выражения геометрической оптики, вместе с тем они применимы и в глубокой тени, как это видно из рассмотрения дифракции на сфере [9, 10] и круговом цилиндре [11]; однако обобщение соответствующих формул на поверхности с переменной кривизной не является очевидным.

Для двухмерных задач такое обобщение было произведено Дж. Б. Келлером [12], сформулировавшим концепцию дифракционных лучей, которые имеют криволинейные участки, лежащие на поверхности тела, и представляют волны, испытавшие дифракцию в собственном смысле слова. По этой концепции полное поле равно сумме вкладов от обычных лучей, подчиняющихся геометрической оптике, и от дифракционных лучей.

Концепцию дифракционных лучей в ее настоящем виде нельзя считать ни вполне обоснованной, ни исчерпывающей. Она скорее является схемой, позволяющей дать физическую интерпретацию и краткую формулировку асимптотических законов дифракции для определенного класса задач. В данной работе мы получаем асимптотическое решение частной дифракционной задачи для выпуклого цилиндра с переменной кривизной поверхности и используем это решение для обоснования и уточнения концепции дифракционных лучей. В качестве такого цилиндра взят эллиптический цилиндр, причем мы ограничились двухмерными полями и простейшими граничными условиями.

1. ФУНКЦИЯ ГРИНА G

Введем эллиптические координаты ξ, η на плоскости x, y по формулам

$$x = f \operatorname{ch}\xi \cos\eta, \quad y = f \operatorname{sh}\xi \sin\eta,$$
$$dx^2 + dy^2 = f^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)(d\xi^2 + d\eta^2) \tag{1}$$

и будем рассматривать область $\xi > \bar{\xi}$ вне эллиптического цилиндра с полуосями

$$a = f \operatorname{ch}\bar{\xi}, \quad b = f \operatorname{sh}\bar{\xi} \tag{2}$$

и с межфокусным расстоянием $2f$. Волновое уравнение

$$\Delta U + k^2 U = 0 \tag{3}$$

в эллиптических координатах (1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + c^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)U = 0, \quad c = kf, \tag{4}$$

причем мы рассматриваем лишь двухмерные волновые поля, не зависящие от третьей координаты z.

Функцией Грина $G = G(\xi, \eta; \xi', \eta') = G(\xi', \eta'; \xi, \eta)$ называется функция, имеющая следующие свойства.

1. Она удовлетворяет уравнениям (3) и (4) всюду, за исключением точки ξ', η', где находится источник («светящаяся линия»).

2. В точке ξ', η' она имеет особенность, соответствующую замене нуля в правой части (3) на двухмерную дельта-функцию $-4\pi\delta(x - x', y - y')$. Иначе говоря,

$$G = \pi i H_0^{(1)}(k\rho) + G^1, \tag{5}$$

где ρ — расстояние между источником и точкой наблюдения; $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля ($\pi i H_0^{(1)}(k\rho) \simeq -2\ln k\rho$ при $k\rho \ll 1$); G^1 — конечная функция.

3. При $\xi \to \infty$ она удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда.

4. На поверхности эллиптического цилиндра $\xi = \bar{\xi}$ она удовлетворяет граничному условию

$$G = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \bar{\xi} \tag{6}$$

или же граничному условию

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \bar{\xi}. \tag{7}$$

5. Она является периодической функцией η с периодом 2π.

Заметим, что вместо условия (5) можно пользоваться либо условием непрерывности G на эллипсе $\xi = \xi'$ вместе с условием

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi'+0} - \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi'-0} = -4\pi\delta(\eta - \eta'), \tag{8}$$

либо условием непрерывности G на гиперболе $\eta = \eta'$ вместе с условием

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta'+0} - \left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta'-0} = -4\pi\delta(\xi - \xi'). \tag{9}$$

Частные решения уравнения (4) находятся методом разделения переменных. Полагая

$$U = R(\xi, \varkappa) S(\eta, \varkappa), \tag{10}$$

ы получаем для «радиальной» функции R уравнение

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} + c^2(\mathrm{ch}^2\xi - \varkappa)R = 0, \tag{11}$$

для «угловой» функции S — уравнение

$$\frac{d^2S}{d\eta^2} + c^2(\varkappa - \cos^2\eta)S = 0, \tag{12}$$

де $\varkappa$ — постоянная разделения. При определенных значениях $\varkappa$ уравнение (12) имеет периодическое решение (функция Матье); при помощи ких функций и соответствующих им решений уравнения (11) легко строить выражение для функции G. Однако это выражение пригодно ля вычислений лишь при поперечных размерах цилиндра, сравнимых длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ или меньших. Когда же размеры цилиндра елики по сравнению с длиной волны, необходим иной подход к проблеме.

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ Г

Обозначим через $\Gamma = \Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta')$ функцию, обладающую теми же ойствами, что и функция G, за исключением свойства 5, которое заеняется условием

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') \to 0 \text{ при } |\eta - \eta'| \to \infty. \tag{13}$$

ункцию Г можно назвать функцией Грина в бесконечнолистной плокости, где значения η, $\eta + 2\pi$, $\eta + 4\pi$ и т. д. соответствуют различным чкам.

Функции G и Г очевидно связаны соотношением

$$G(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi, \eta + 2\pi j; \xi', \eta'). \tag{14}$$

ак мы увидим далее, этот ряд быстро сходится, если размеры цилинд- превышают длину волны.

Перейдем к построению функции Г. Обозначим через R_1 и R_2 реше- ия дифференциального уравнения (12), имеющие при $\xi \to \infty$ асимпто- ическое поведение:

$$R_1 = R_1(\xi, \varkappa) \sim \frac{e^{ic\,\mathrm{ch}\,\xi}}{\sqrt{c\,\mathrm{ch}\,\xi}},$$

$$R_2 = R_2(\xi, \varkappa) \sim \frac{e^{-ic\,\mathrm{ch}\,\xi}}{\sqrt{c\,\mathrm{ch}\,\xi}}, \tag{15}$$

ак что R_1 дает волны, уходящие в бесконечность, а R_2 — приходящие з бесконечности. Обозначим через S_1 и S_2 решения уравнения (12), довлетворяющие соотношениям

$$S_1(\eta + 2\pi j, \varkappa) = \tau^{2j} S_1(\eta, \varkappa),$$
$$S_2(\eta - 2\pi j, \varkappa) = \tau^{2j} S_2(\eta, \varkappa), \tag{16}$$

е. теореме Флоке, которую мы будем далее применять для комплексых $\varkappa$, считая параметр $\tau = \tau(\varkappa)$ удовлетворяющим условию $|\tau| < 1$. огда S_1 дает волны, затухающие при $\eta \to \infty$, а S_2 — волны, затухаюие при $\eta \to -\infty$.

Функцию Γ можно искать в виде ($s = 1, 2, \ldots$)

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') &= \Sigma A_s R_1(\xi, \varkappa_s) S_1(\eta, \varkappa_s) S_2(\eta', \varkappa_s) \text{ при } \eta > \eta', \\ \Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') &= \Sigma A_s R_1(\xi, \varkappa_s) S_2(\eta, \varkappa_s) S_1(\eta', \varkappa_s) \text{ при } \eta < \eta',\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

где A_s — неизвестные коэффициенты. Ряды (17) удовлетворяют условиям 1 и 3, а также условию (13). Граничное условие (6) удовлетворится, если

$$R_1(\bar{\xi}, \varkappa_s) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots), \quad (18)$$

а граничное условие (7) будет выполнено, если

$$\frac{\partial R_1}{\partial \xi}(\bar{\xi}, \varkappa_s) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots). \quad (19)$$

В § 3 мы увидим, что как уравнение (18), так и уравнение (19) приводит к комплексным $\varkappa_s$.

Коэффициенты A_s определяются из (9). Обозначим через $D = D(\varkappa)$ вронскиан

$$D = \frac{dS_1}{d\eta} S_2 - S_1 \frac{dS_2}{d\eta}, \quad (20)$$

тогда условие (9) примет вид

$$\Sigma A_s D(\varkappa_s) R_1(\xi, \varkappa_s) = -4\pi\delta(\xi - \xi') \text{ при } \bar{\xi} < \xi < \infty. \quad (21)$$

Пользуясь соотношением ортогональности

$$\int_{\bar{\xi}}^{\infty e^{i\varepsilon}} R_1(\xi, \varkappa_s) R_1(\xi, \varkappa_r) d\xi = 0 \text{ при } s \neq r, \quad (22)$$

получим

$$A_s = -\frac{4\pi}{D(\varkappa_s) N_1(\varkappa_s)} R_1(\xi', \varkappa_s),$$

$$N_1(\varkappa_s) = \int_{\bar{\xi}}^{\infty e^{i\varepsilon}} R_1^2(\xi, \varkappa_s) d\xi. \quad (23)$$

Соотношение (22) легко выводится из тождества

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{dR_1}{d\xi}(\xi, \varkappa) R_1(\xi, \varkappa') - R_1(\xi, \varkappa) \frac{dR_1}{d\xi}(\xi, \varkappa')\right] + \\ + c^2(\varkappa' - \varkappa) R_1(\xi, \varkappa) R_1(\xi, \varkappa') = 0, \quad (24)$$

если положить $\varkappa = \varkappa_s$, $\varkappa' = \varkappa_r$ и проинтегрировать по ξ, используя соотношение (18) или (19) и выбирая $\varepsilon > 0$ так, чтобы $R_1 \to 0$ при $\xi \to \infty e^{i\varepsilon}$. Если же положить $\varkappa = \varkappa_s$, проинтегрировать и затем считать $\varkappa' \to \varkappa_s$, то получим для «нормы» N_1 выражение

$$N_1(\varkappa_s) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial R_1}{\partial \xi}(\bar{\xi}, \varkappa_s) \frac{\partial R_1}{\partial \varkappa}(\bar{\xi}, \varkappa_s), \quad (25)$$

если $\varkappa_s$ удовлетворяет уравнению (18), и выражение

$$N_1(\varkappa_s) = -\frac{1}{c^2} R_1(\bar{\xi}, \varkappa_s) \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi \partial \varkappa}(\bar{\xi}, \varkappa_s), \quad (26)$$

если $\varkappa_s$ есть корень уравнения (19).

Ряд

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') =$$

$$= -4\pi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{D(\varkappa_s) N_1(\varkappa_s)} R_1(\xi, \varkappa_s) R_1(\xi', \varkappa_s) \begin{Bmatrix} S_1(\eta, \varkappa_s) S_2(\eta', \varkappa_s) \\ S_2(\eta, \varkappa_s) S_1(\eta', \varkappa_s) \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

це верхнюю строчку в фигурной скобке следует брать при $\eta > \eta'$, нижнюю — при $\eta < \eta'$, удовлетворяет (по крайней мере формально) ем условиям, наложенным на функцию Г, и дает искомое решение.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ Г ВБЛИЗИ ЦИЛИНДРА

Формула (27) является точной и в принципе пригодна при любых начениях c и $\bar{\xi}$. Далее мы будем считать, что наименьший радиус ривизны эллипса $\xi = \bar{\xi}$ (равный b^2/a) велик по сравнению с длиной олны:

$$k \frac{b^2}{a} = c \frac{\operatorname{sh}^2 \bar{\xi}}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \gg 1, \quad (28)$$

следовательно, все другие размеры и радиусы кривизны и подавно ольше длины волны. При этом условии мы можем произвести асимптоическое интегрирование дифференциального уравнения (11) при помощи талонного» уравнения (ср. [16], § 3)

$$w''(\varphi) - \varphi w(\varphi) = 0, \quad (29)$$

торому удовлетворяют функции Эйри $w_1(\varphi)$ и $w_2(\varphi)$. Определенные ыше радиальные функции R_1 и R_2 приближенно равны

$$R_1(\xi, \varkappa) = \sqrt[4]{\frac{-\varphi}{c^2(\operatorname{ch}^2 \xi - \varkappa)}}\, w_1(\varphi), \quad R_2(\xi, \varkappa) = \sqrt[4]{\frac{-\varphi}{c^2(\operatorname{ch}^2 \xi - \varkappa)}}\, w_2(\varphi). \quad (30)$$

ответствие между переменными φ и ξ при вещественном положительм значении $\varkappa = \operatorname{ch}^2 \xi_0$ ($\xi_0 > 0$) устанавливается формулами

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}(-\varphi)^{3/2} &= c \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \varkappa}\, d\xi \quad \text{при } \xi > \xi_0 \text{ и } \varphi < 0, \\ \frac{2}{3}\varphi^{3/2} &= c \int_{\xi}^{\xi_0} \sqrt{\varkappa - \operatorname{ch}^2 \xi}\, d\xi \quad \text{при } \xi < \xi_0 \text{ и } \varphi > 0. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

ли $\varkappa$ комплексно, то нужно пользоваться аналитическим продолжеем. Обозначая через t_s значение φ при $\xi = \bar{\xi}$ и $\varkappa = \varkappa_s$, уравнение (18) еобразуем к виду

$$w_1(t_s) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots), \quad (32)$$

а уравнение (19) — к виду

$$w_1'(t_s) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots). \quad (33)$$

мплексные корни $t_s = |t_s| e^{i\frac{\pi}{3}}$ хорошо изучены (см. [2], § 7).

Если предположить (результат (35) это подтверждает), что $\xi_{0s} \simeq \bar{\xi}$, то рая формула (31) дает

$$\frac{2}{3} t_s^{3/2} = \frac{2}{3} c \sqrt{\operatorname{sh} 2\bar{\xi}}\, (\xi_{0s} - \bar{\xi})^{3/2} \qquad (\varkappa_s = \operatorname{ch}^2 \xi_{0s}), \quad (34)$$

откуда

$$\xi_{0s} = \bar{\xi} + \frac{t_s}{(c^2 \operatorname{sh} 2\bar{\xi})^{1/3}}, \qquad \varkappa_s = \operatorname{ch}^2 \bar{\xi} + \left(\frac{\operatorname{sh} 2\bar{\xi}}{c}\right)^{2/3} t_s. \tag{35}$$

Зная $\varkappa_s$, можем найти по формулам (30) $R_1(\xi, \varkappa_s)$ и $R_2(\xi, \varkappa_s)$.

Асимптотическое решение уравнения (12) можно записать в более простом виде:

$$\left.\begin{aligned} S_1(\eta, \varkappa) = \frac{1}{\sqrt[4]{c^2(\varkappa - \cos^2\eta)}} e^{iQ}, \quad S_2(\eta, \varkappa) = \frac{1}{\sqrt[4]{c^2(\varkappa - \cos^2\eta)}} e^{-iQ}, \\ Q = c\int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{\varkappa - \cos^2\eta}\, d\eta, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где нижний предел η_0 произволен. Для функций (36) вронскиан $D = 2i$.

При $\varkappa = \varkappa_s$ получаем приближенное выражение

$$c\int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{\varkappa_s - \cos^2\eta}\, d\eta = \sigma + t_s x, \tag{37}$$

причем величины σ и x равны:

$$\sigma = c\int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta}\, d\eta,$$

$$x = \frac{c}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\bar{\xi}}{c}\right)^{2/3} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta}}. \tag{38}$$

Заменяя, кроме того, в предэкспоненциальных множителях $\varkappa$ на $\operatorname{ch}^2\bar{\xi}$, получаем для S_1 и S_2 окончательные выражения:

$$S_1(\eta, \varkappa_s) = \frac{1}{\sqrt[4]{c^2(\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta)}} e^{i(\sigma + t_s x)},$$

$$S_2(\eta, \varkappa_s) = \frac{1}{\sqrt[4]{c^2(\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta)}} e^{-i(\sigma + t_s x)}. \tag{39}$$

Пусть источник и точка наблюдения находятся вблизи поверхности цилиндра, так что $\xi \simeq \bar{\xi}$ и $\xi' \simeq \bar{\xi}$. Обозначая

$$y = (c^2 \operatorname{sh} 2\bar{\xi})^{1/3}(\xi - \bar{\xi}),$$

$$y' = (c^2 \operatorname{sh} 2\bar{\xi})^{1/3}(\xi' - \bar{\xi}) \tag{40}$$

и пользуясь приближенным соотношением

$$\varkappa_s - \operatorname{ch}^2\xi = \left(\frac{\operatorname{sh} 2\bar{\xi}}{c}\right)^{2/3}(t_s - y) \quad (\varphi = t_s - y \text{ при } \varkappa = \varkappa_s), \tag{41}$$

получаем выражения

$$R_1(\xi, \varkappa_s) = (c^2 \operatorname{sh} 2\bar{\xi})^{-1/6} w_1(t_s - y),$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \xi}(\xi, \varkappa_s) = -(c^2 \operatorname{sh} 2\bar{\xi})^{1/6} w_1'(t_s - y), \tag{42}$$

ак что величина (25) равна

$$N_1(\varkappa_s) = -(c^2 \operatorname{sh} 2\bar{\xi})^{-2/3} [w_1'(t_s)]^2, \tag{43}$$

величина (26) получается равной

$$N_1(\varkappa_s) = (c^2 \operatorname{sh} 2\bar{\xi})^{-2/3} t_s [w(t_s)]^2. \tag{44}$$

водя обозначение

$$M(\eta) = \left[\frac{k\rho(\eta)}{2}\right]^{1/3} = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} 2\bar{\xi}}\right)^{1/3} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \bar{\xi} - \cos^2 \eta}, \tag{45}$$

де $\rho(\eta)$ есть радиус кривизны эллипса $\xi = \bar{\xi}$, можем записать функцию Γ при граничном условии (6) в виде

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') = \\ = \frac{2\pi i}{\sqrt{M(\eta) M(\eta')}} e^{i|\sigma-\sigma'|} \Psi(|x-x'|, y, y', \infty), \tag{46}$$

при граничном условии (7) — в виде

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') = \frac{2\pi i}{\sqrt{M(\eta) M(\eta')}} e^{i|\sigma-\sigma'|} \Psi(|x-x'|, y, y', 0), \tag{47}$$

де

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x, y, y', \infty) &= -\sum e^{it_s x} \frac{w_1(t_s - y)}{w_1'(t_s)} \frac{w_1(t_s - y')}{w_1'(t_s)}, \\ \Psi(x, y, y', 0) &= \sum e^{it_s x} \frac{1}{t_s} \frac{w_1(t_s - y)}{w_1(t_s)} \frac{w_1(t_s - y')}{w_1(t_s)}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Контурный интеграл (в котором надо считать $y' \geqslant y$)

$$\Psi(x, y, y', q) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_C e^{itx} w_1(t - y') \left[w_2(t - y) - \frac{w_2'(t) - q w_2(t)}{w_1'(t) - q w_1(t)} w_1(t - y) \right] dt \tag{49}$$

риводит при $q = \infty$ и $q = 0$ к рядам (48). Контур C охватывает в положительном направлении все полюсы t_s подынтегральной функции, причем, вычисляя вычеты, нужно учитывать соотношение

$$w_1'(t) w_2(t) - w_1(t) w_2'(t) = -2i. \tag{50}$$

войства интеграла (49) детально исследованы. В частности, пользуясь тражательной формулой для функции Ψ (см. [16], § 2), получаем при $\simeq \eta'$

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') = \\ = \sqrt{\frac{2\pi}{|\sigma-\sigma'|}} e^{i\left(|\sigma-\sigma'| + \frac{\pi}{4}\right)} \left[e^{i\frac{(y-y')^2}{4|x-x'|}} \mp e^{i\frac{(y+y')^2}{4|x-x'|}} \right], \tag{51}$$

де минус соответствует граничному условию (6), а плюс — условию (7). ервое слагаемое в квадратной скобке определяет первичную цилиндрическую волну, согласно формуле (5) равную

$$\pi i H_0^{(1)}(k\rho) = \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} e^{i\left(k\rho + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{при } k\rho \geqslant 1, \tag{52}$$

второе слагаемое дает волну, зеркально отраженную от цилиндра.

4. ФУНКЦИЯ Г ВДАЛИ ОТ ЦИЛИНДРА

Перейдем к исследованию случаев, когда координата ξ или ξ' велика (характеристика излучения источника, находящегося вблизи цилиндра, или дифракционное поле плоской волны) или когда обе координаты ξ и ξ' велики (характеристика рассеяния плоской волны на цилиндре).

Ряд (27) можно преобразовать при граничном условии (6) в контурный интеграл

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') =$$

$$= \frac{ic^2}{2}\int_C R_1(\xi', \varkappa)\left[R_2(\xi, \varkappa) - \frac{R_2(\bar{\xi}, \varkappa)}{R_1(\bar{\xi}, \varkappa)} R_1(\xi, \varkappa)\right] S_1(\eta, \varkappa)\, S_2(\eta', \varkappa)\, d\varkappa, \quad (53)$$

а при граничном условии (7) — в интеграл

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') =$$

$$= \frac{ic^2}{2}\int_C R_1(\xi', \varkappa)\left[R_2(\xi, \varkappa) - \frac{\frac{\partial R_2}{\partial \xi}(\bar{\xi}, \varkappa)}{\frac{\partial R_1}{\partial \xi}(\bar{\xi}, \varkappa)} R_1(\xi, \varkappa)\right] S_1(\eta, \varkappa)\, S_2(\eta', \varkappa)\, d\varkappa, \quad (54)$$

где контур C охватывает все полюсы $\varkappa_s$ в положительном направлении. В этих точных интегралах мы считаем $\xi' \geqslant \xi$ и $\eta \geqslant \eta'$ и предполагаем, что

$$D = \frac{dS_1}{d\eta} S_2 - S_1 \frac{dS_2}{d\eta} = 2i, \quad \frac{dR_1}{d\xi} R_2 - R_1 \frac{dR_2}{d\xi} = 2i. \quad (55)$$

При $\xi' \to \infty$ функция $R_1(\xi', \varkappa)$ в силу формулы (30) принимает вид

$$R_1(\xi', \varkappa) = \frac{1}{\sqrt[4]{c^2(\operatorname{ch}^2 \xi' - \varkappa)}} e^{i\left(c\int_{\xi_0}^{\xi'} \sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \varkappa}\, d\xi + \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (56)$$

Пользуясь тождеством

$$\int_{\xi_0}^{\xi'} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \varkappa}\, d\xi = \operatorname{th} \xi' \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi' - \varkappa} - \int_0^{\arccos \frac{\sqrt{\varkappa}}{\operatorname{ch} \xi'}} \sqrt{\varkappa - \cos^2 \eta}\, d\eta, \quad (57)$$

можем переписать формулу (56) в более простом виде:

$$R_1(\xi', \varkappa) = \frac{1}{\sqrt{c \operatorname{ch} \xi'}} e^{i\left(c \operatorname{ch} \xi' + \frac{\pi}{4} - Q_0\right)},$$

$$Q_0 = c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\varkappa - \cos^2 \eta}\, d\eta \quad (58)$$

и ввести новую функцию $\Gamma(\xi, \eta; \eta')$ — функцию Грина для плоской волны — по формуле

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sqrt{\frac{2\pi}{c \operatorname{ch} \xi'}} e^{i\left(c \operatorname{ch} \xi' + \frac{\pi}{4}\right)} \Gamma(\xi, \eta; \eta') \quad (\xi' \to \infty). \quad (59)$$

Пользуясь приближенными формулами

$$\varkappa = \operatorname{ch}^2 \bar{\xi} + \left(\frac{\operatorname{sh} 2\bar{\xi}}{c}\right)^{2/3} t, \quad Q_0 = \sigma_0 + t x_0, \quad (60)$$

е

$$\sigma_0 = c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta}\, d\eta, \qquad x_0 = \frac{c}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\bar{\xi}}{c}\right)^{2/3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta}}, \quad (61)$$

считая $\xi \simeq \bar{\xi}$, получаем выражение

$$\xi, \eta; \eta') = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\bar{\xi}\operatorname{sh}\bar{\xi}}}{\sqrt[4]{(\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta)(\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta')}} e^{i(|\sigma - \sigma'| - \sigma_0)} V_1(|x - x'| - x_0, y, q), \quad (62)$$

которым

$$V_1(x, y, q) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_C e^{itx}\left[w_2(t-y) - \frac{w_2'(t) - q w_2(t)}{w_1'(t) - q w_1(t)} w_1(t-y)\right] dt \quad (63)$$

ть «множитель ослабления» для плоской волны, причем при граничном условии (6) надо полагать $q = \infty$, а при граничном условии (7) $q = 0$.

Чтобы вычислить характеристику рассеяния, нужно в интегралах (53) и (54) отделить первичную (падающую) волну от вторичной (рассеянной) волны. Введем функцию

$$R_0(\xi, \varkappa) = \frac{R_1(\xi, \varkappa) - R_2(\xi, \varkappa)}{2i} \quad (64)$$

перепишем интеграл (53) в виде

$$\xi, \eta; \xi', \eta') = c^2 \int_C R_1(\xi', \varkappa)\left[R_0(\xi, \varkappa) - \frac{R_0(\bar{\xi}, \varkappa)}{R_1(\bar{\xi}, \varkappa)} R_1(\xi, \varkappa)\right] S_1(\eta, \varkappa) S_2(\eta', \varkappa)\, d\varkappa. \quad (65)$$

жно показать, что первое слагаемое в квадратной скобке дает первичную волну, так что вторичная волна равна

$$(\xi, \eta; \xi', \eta') = -c^2 \int_C R_1(\xi', \varkappa) R_1(\xi, \varkappa) S_1(\eta, \varkappa) S_2(\eta', \varkappa) \frac{R_0(\bar{\xi}, \varkappa)}{R_1(\bar{\xi}, \varkappa)} d\varkappa. \quad (66)$$

Характеристика рассеяния $\gamma(\eta, \eta')$ определяется формулой

$$\gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2\pi}{c \ldots \xi \operatorname{ch}\xi'}} e^{ic(\operatorname{ch}\xi + \operatorname{ch}\xi') + i\frac{\pi}{4}} \gamma(\eta, \eta') \quad \begin{pmatrix} \xi \to \infty \\ \xi' \to \infty \end{pmatrix} \quad (67)$$

при граничном условии (6) она равна

$$\eta, \eta') = -\frac{(c^2 \operatorname{sh}^2 2\bar{\xi})^{3/2}}{c\sqrt{2}\sqrt[4]{(\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta)(\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta')}} e^{i(|\sigma - \sigma'| - 2\sigma_0)} \hat{f}(|x - x'| - 2x_0), \quad (68)$$

$$\hat{f}(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_C e^{itx} \frac{v(t)}{w_1(t)} dt. \quad (69)$$

и граничном условии (7) вместо формулы (66) будем иметь

$$, \eta; \xi', \eta') = -c^2 \int_C R_1(\xi', \varkappa) R_1(\xi, \varkappa) S_1(\eta, \varkappa) S_2(\eta', \varkappa) \frac{\frac{\partial R_0}{\partial \xi}(\bar{\xi}, \varkappa)}{\frac{\partial R_1}{\partial \xi}(\bar{\xi}, \varkappa)} d\varkappa, \quad (70)$$

так что

$$\gamma(\eta, \eta') = -\frac{(c^2 \operatorname{sh} 2\bar{\xi})^{2/3}}{c\sqrt{2}\sqrt[4]{(\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta)(\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta')}} e^{i(|\sigma - \sigma'| - 2\sigma_0)} \hat{g}(|x - x'| - 2x_0), \quad (71)$$

где

$$\hat{g}(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_C e^{itx} \frac{v'(t)}{w_1'(t)} dt. \quad (72)$$

Как будет показано далее, результаты этого параграфа необходимо уточнить, если функции $\Gamma(\xi, \eta; \eta')$ или $\gamma(\eta, \eta')$ соответствуют волнам, приходящим в точку наблюдения по обычным законам геометрической оптики (без дифракции). Тогда исходный ряд (27) после подстановки (58) расходится, однако контурные интегралы сходятся и позволяют исследовать переход законов дифракции в законы геометрической оптики.

5. БОЛЕЕ ДЕТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Выясним прежде всего физический смысл формулы (62). Определим углы η_1' и η_2' соотношениями

$$\sin\eta_\nu' = \epsilon_\nu \frac{\operatorname{sh}\bar{\xi}\cos\eta'}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta'}},$$

$$\cos\eta_\nu' = -\epsilon_\nu \frac{\operatorname{ch}\bar{\xi}\sin\eta'}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta'}},$$

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta'} = \frac{\operatorname{ch}\bar{\xi}\operatorname{sh}\bar{\xi}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta'}}, \quad (73)$$

где $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_2 = -1$. Как легко показать, η_1' и η_2' суть координаты точек касания эллипса с прямыми, проведенными к бесконечно удаленному источнику (см. рис. 1). При помощи теоремы сложения для

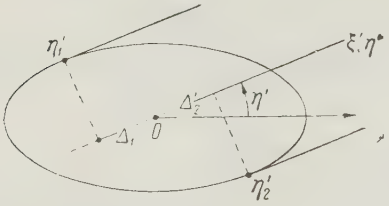


Рис. 1. Точки касания η_1' и η_2' на цилиндре (в данном случае $\Delta_1' < 0$ и $\Delta_2' > 0$)

эллиптических интегралов ([13], стр. 315) можно доказать следующие тождества:

$$\left.\begin{aligned} x' + x_0 &= x_1', \quad \sigma' + \sigma_0 = \sigma_1' - c\frac{\cos\eta_1'\cos\eta'}{\operatorname{ch}\bar{\xi}}, \\ x' - x_0 &= x_2', \quad \sigma' - \sigma_0 = \sigma_2' - c\frac{\cos\eta_2'\cos\eta'}{\operatorname{ch}\bar{\xi}}, \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

где x_ν' и σ_ν' — значения x и σ при $\eta = \eta_\nu'$. Эти тождества непосредственно проверяются при $\bar{\xi} \to \infty$, когда эллипс переходит в окружность, а также при $\eta' = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \ldots$. Они справедливы лишь при определенном выборе η_1' и η_2' и при замене η_ν' на $\eta_\nu' + 2\pi j$ усложняются

Мы получаем

$$\left.\begin{aligned} |x-x'|-x_0 &= x-x_1', \quad |\sigma-\sigma'|-\sigma_0=\sigma-\sigma_1'-k\Delta_1' \quad \text{при } \eta>\eta', \\ |x-x'|-x_0 &= x_2'-x, \quad |\sigma-\sigma'|-\sigma_0=\sigma_2'-\sigma-k\Delta_2' \quad \text{при } \eta<\eta', \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

где слагаемое (см. рис. 1)

$$-k\Delta_\nu' = -c\,(\mathrm{ch}\bar{\xi}\cos\eta_\nu'\cos\eta' + \mathrm{sh}\,\bar{\xi}\sin\eta_\nu'\sin\eta') = -c\,\frac{\cos\eta_\nu'\cos\eta'}{\mathrm{ch}\,\bar{\xi}} \tag{76}$$

определяет фазу плоской волны в точках касания, а слагаемое $\epsilon_\nu(\sigma-\sigma_\nu')$, пропорциональное длине дуги эллипса от точки касания η_ν' до точки наблюдения, определяет геометрический набег фазы на криволинейной части дифракционного луча. Множитель ослабления V_1 в формуле (69) зависит от аргумента $\epsilon_\nu(x-x_\nu')$ и определяет затухание и сдвиг фазы дифракционного луча на его криволинейной части. Окончательно формулу (62) можно записать в виде

$$\Gamma(\xi,\eta;\eta') = \sqrt{\frac{M(\eta_\nu')}{M(\eta)}}\,e^{i\,[\epsilon_\nu(\sigma-\sigma_\nu')-k\Delta_\nu']}\,V_1(\epsilon_\nu(x-x_\nu'),\,y,\,q). \tag{77}$$

При граничном условии (6) целесообразно ввести функцию

$$\Gamma_\alpha(\eta,\eta') = \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi}(\bar{\xi},\eta;\eta') =$$

$$= (c^2\,\mathrm{sh}\,2\bar{\xi})^{1/2}\sqrt{\frac{M(\eta_\nu')}{M(\eta)}}\,e^{i\,[\epsilon_\nu(\sigma-\sigma_\nu')-k\Delta_\nu']}\,f(\epsilon_\nu(x-x_\nu')), \tag{78}$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_C \frac{e^{itx}\,dt}{w_1(t)}, \tag{79}$$

а при граничном условии (7) — функцию

$$\Gamma_\beta(\eta,\eta') = \Gamma(\bar{\xi},\eta;\eta') = \sqrt{\frac{M(\eta_\nu')}{M(\eta)}}\,e^{i\,[\epsilon_\nu(\sigma-\sigma_\nu')-k\Delta_\nu']}\,g(\epsilon_\nu(x-x_\nu')), \tag{80}$$

где

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_C \frac{e^{itx}\,dt}{w_1'(t)}. \tag{81}$$

Пользуясь этими формулами, надо считать $\nu=1$ при $\eta>\eta'$ и $\nu=2$ при $\eta<\eta'$. При $\eta-\eta_1'>2\pi m$ $(m=1,\,2,\ldots)$ формулы дают дифракционный луч, не менее m раз обошедший цилиндр в положительном направлении, при $\eta_2'-\eta>2\pi m$ — в отрицательном. Вклад от таких лучей, как правило, пренебрежимо мал, поскольку аргумент $\epsilon_\nu(x-x_\nu')$ для них превышает $4mx_0$, причем согласно формулам (61) и (28) имеем

$$x_0 > \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\,\frac{\mathrm{sh}^2\bar{\xi}}{\mathrm{ch}\,\bar{\xi}}\right)^{1/3}, \tag{82}$$

т. е. величина x_0 по меньшей мере равна нескольким единицам.

Наибольшее значение имеют лучи, у которых аргумент $\epsilon_\nu(x-x_\nu')$ невелик или же отрицателен. При большом отрицательном аргументе формулы (77), (78) и (80) представляют не дифракционный луч, а пару лучей (прямой луч и отраженный от цилиндра), подчиняющихся геометрической оптике; в этом случае они нуждаются в уточнении, которое мы для простоты проведем только для функций Γ_α и Γ_β; их в силу

формул (53), (54) и (58) можно при $\eta > \eta'$ записать в виде

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_\alpha(\eta, \eta') &= \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iQ_0} \frac{S_1(\eta, \varkappa) S_2(\eta', \varkappa)}{R_1(\bar{\xi}, \varkappa)} d\varkappa = \\
&= \frac{ce^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\sqrt[4]{c^2(\mathrm{ch}^2\bar{\xi} - \varkappa)}\, e^{i\omega(\varkappa)} d\varkappa}{\sqrt[4]{(\varkappa - \cos^2\eta)(\varkappa - \cos^2\eta')}}, \\
\Gamma_\beta(\eta, \eta') &= -\frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iQ_0} \frac{S_1(\eta, \varkappa) S_2(\eta', \varkappa)}{\frac{\partial R_1}{\partial \bar{\xi}}(\bar{\xi}, \varkappa)} d\varkappa = \\
&= \frac{ce^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{i\omega(\varkappa)} d\varkappa}{\sqrt[4]{c^2(\mathrm{ch}^2\bar{\xi} - \varkappa)(\varkappa - \cos^2\eta)(\varkappa - \cos^2\eta')}},
\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

где фаза $\omega(\varkappa)$ равна

$$\omega(\varkappa) = c\int_{\eta'}^{\eta} \sqrt{\varkappa - \cos^2\eta}\, d\eta - c\int_{\bar{\xi}_0}^{\bar{\xi}} \sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \varkappa}\, d\xi - c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\varkappa - \cos^2\eta}\, d\eta. \quad (84)$$

Учитывая, что при $\eta < \eta'$ нужно в формуле (84) поменять местами η и η', можем переписать уравнение $\omega'(\varkappa) = 0$ в виде

$$\begin{aligned}
&\epsilon_\nu\left[F\left(k, \frac{\pi}{2} - \eta'\right) - F\left(k, \frac{\pi}{2} - \eta\right)\right] + \\
&+ F\left(k, \frac{\pi}{2} + i\bar{\xi}_0\right) - F\left(k, \frac{\pi}{2} + i\bar{\xi}\right) - F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 0,
\end{aligned} \quad (85)$$

где $F(k, \varphi)$ есть эллиптический интеграл 1-го рода, а $k = 1/\sqrt{\varkappa}$. Трижды применяя теорему сложения для эллиптических интегралов, получаем для точки стационарной фазы уравнение

$$\epsilon_\nu \frac{\sin\eta\cos\eta'\sqrt{\varkappa - \cos^2\eta} - \cos\eta\sin\eta'\sqrt{\varkappa - \cos^2\eta'}}{\varkappa - \cos^2\eta\cos^2\eta'} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\bar{\xi}}. \quad (86)$$

Нужный нам корень $\varkappa_0$ этого уравнения равен

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_0 &= \mathrm{ch}^2\bar{\xi} - (\mathrm{sh}\,\bar{\xi}\cos\eta\cos\eta' + \mathrm{ch}\,\bar{\xi}\sin\eta\sin\eta')^2, \\
\sqrt{\mathrm{ch}^2\bar{\xi} - \varkappa_0} &= \mathrm{sh}\,\bar{\xi}\cos\eta\cos\eta' + \mathrm{ch}\,\bar{\xi}\sin\eta\sin\eta'.
\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Дальнейшие выкладки справедливы при условии, что правая часть последнего соотношения положительна и не мала; она обращается в нуль при $\eta = \eta_1'$ и $\eta = \eta_2'$. После довольно громоздких преобразований получаем

$$\left.\begin{aligned}
\omega_0 &= \omega(\varkappa_0) = -c(\mathrm{ch}\,\bar{\xi}\cos\eta\cos\eta' + \mathrm{sh}\,\bar{\xi}\sin\eta\sin\eta'), \\
\omega''(\varkappa_0) &= -\frac{c}{4} \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{ch}^2\bar{\xi} - \varkappa_0)(\varkappa_0 - \cos^2\eta)(\varkappa_0 - \cos^2\eta')}},
\end{aligned}\right\} \quad (88)$$

и метод стационарной фазы дает выражения

$$\Gamma_\alpha(\eta, \eta') = 2i\frac{\partial\omega_0}{\partial\bar{\xi}} e^{i\omega_0}, \quad \Gamma_\beta(\eta, \eta') = 2e^{i\omega_0}, \quad (89)$$

ответствующие геометрической оптике и смыкающиеся с формулами 78) и (80) при $\eta \simeq \eta_\nu'$ и больших отрицательных $\epsilon_\nu(x - x_\nu')$, когда имеют место асимптотические соотношения

$$f(\zeta) = 2i\zeta e^{-\frac{i}{3}\zeta^3}, \quad g(\zeta) = 2e^{-\frac{i}{3}\zeta^3} \quad (\zeta \to -\infty). \tag{90}$$

6. ХАРАКТЕРИСТИКА РАССЕЯНИЯ

В конце § 4 мы нашли выражения для характеристики рассеяния $\gamma(\eta, \eta')$. Приведенный там вывод необходимо дополнить, а именно доказать, что первое слагаемое в интеграле (65) дает первичную волну $iH_0^{(1)}(k\rho)$, и кроме того вывести выражение для $\gamma(\eta, \eta')$ в случае, когда она представляет обычный луч. Здесь мы применим, однако, несколько иной метод, основанный на формуле

$$G = \pi i H_0^{(1)}(k\rho) + \frac{i}{4}\oint\left[G\frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial n} - H_0^{(1)}(kr)\frac{\partial G}{\partial n}\right]dl, \tag{91}$$

которая выражает функцию Грина G в любой точке через первичную волну и через значения функции G и ее производной по внешней нормали $\partial G/\partial n$ на граничном эллипсе $\xi = \bar{\xi}$; r есть расстояние между точкой $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ на эллипсе и точкой наблюдения ξ, η. При граничном условии (6) имеем

$$\gamma(\eta, \eta') = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}}\int \Gamma_\alpha(\bar{\eta}, \eta')\, e^{i\psi}\, d\bar{\eta}, \tag{92}$$

при граничном условии (7)

$$\gamma(\eta, \eta') = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}}\int \Gamma_\beta(\bar{\eta}, \eta')\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\xi}}\, e^{i\psi} d\bar{\eta}, \tag{93}$$

где

$$\psi = -c(\operatorname{ch}\bar{\xi}\cos\bar{\eta}\cos\eta + \operatorname{sh}\bar{\xi}\sin\bar{\eta}\sin\eta). \tag{94}$$

Если вблизи точки стационарной фазы ($\bar{\eta} \simeq \eta_\nu$) для функций Γ_α и Γ_β применимы выражения (78) и (80), то интегралы (92) и (93) можно вычислить уточненным методом стационарной фазы (см. [11]); в этом случае «быстро меняющаяся» фаза подынтегральной функции равна

$$\omega(\bar{\eta}) = \epsilon_\nu(\bar{\sigma} - \sigma_\nu') + \psi. \tag{95}$$

Корни η_1 и η_2 уравнения $\omega'(\bar{\eta}) = 0$ определяются соотношениями

$$\sin\eta_\nu = -\epsilon_\nu\frac{\operatorname{sh}\bar{\xi}\cos\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta}}, \quad \cos\eta_\nu = \epsilon_\nu\frac{\operatorname{ch}\bar{\xi}\sin\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta}},$$
$$\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta_\nu} = \frac{\operatorname{ch}\bar{\xi}\operatorname{sh}\bar{\xi}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi} - \cos^2\eta}}. \tag{96}$$

Разложение функции (95) при $\bar{\eta} \simeq \eta_\nu$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\omega(\bar{\eta}) &= \omega(\eta_\nu) + \frac{\epsilon_\nu}{3}s^3, \quad s = \bar{x} - x_\nu,\\ \omega(\eta_\nu) &= \epsilon_\nu(\sigma_\nu - \sigma_\nu') - c\frac{\cos\eta_\nu\cos\eta}{\operatorname{ch}\bar{\xi}} = \epsilon_\nu(\sigma_\nu - \sigma_\nu') - k\Delta_\nu,\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

причем смысл Δ_ν тот же, что и смысл Δ_ν' (см. рис. 1 и 2).

Вынося множители $\sqrt{\frac{M(\eta_\nu')}{M(\eta)}}$ и $\partial\psi/\partial\bar{\xi}$ за знак интеграла (при $\bar{\eta}=\eta_\nu$) и используя интегральные представления (79) и (81) вместе с соотношением

$$v(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\epsilon_\nu\left(ts+\frac{1}{3}s^3\right)}ds, \tag{98}$$

получаем формулы

$$\gamma(\eta,\eta')=-\sqrt{2M(\eta_\nu)M(\eta_\nu')}\,e^{i\epsilon_\nu(\sigma_\nu-\sigma_\nu')-ik(\Delta_\nu+\Delta_\nu')}\,\hat{f}(\epsilon_\nu(x_\nu-x_\nu')) \tag{99}$$

и

$$\gamma(\eta,\eta')=-\sqrt{2M(\eta_\nu)M(\eta_\nu')}\,e^{i\epsilon_\nu(\sigma_\nu-\sigma_\nu')-ik(\Delta_\nu+\Delta_\nu')}\,\hat{g}(\epsilon_\nu(x_\nu-x_\nu')), \tag{100}$$

эквивалентные формулам (68) и (71) соответственно.

Формулы (99) и (100) показывают, что рассеянное поле формируется так: лучи, приходящие из бесконечно удаленного источника η', касаются цилиндра в точках η_1' и η_2' и дают начало дифракционным лучам *1* и *2*, причем луч *1* обегает цилиндр в положительном направлении ($\epsilon_1=1$), а луч *2* — в отрицательном ($\epsilon_2=-1$). Луч *1* может попасть в бесконечно удаленную точку наблюдения η, только оторвавшись от цилиндра в точке η_1, а луч *2* — в точке η_2 (рис. 2), причем до отрыва они могут обежать цилиндр произвольное число раз.

Если аргумент $\epsilon_\nu(x_\nu-x_\nu')$ отрицателен, то функция $\gamma(\eta,\eta')$ дает не дифракционный, а обычный луч, подчиняющийся геометрической оптике; последняя при скользящем падении луча (при малом и конечном $|x_\nu-x_\nu'|$) нуждается, впрочем, в уточнении по формулам (99) и (100). В остальных случаях следует в интегралы (92) и (93) подставлять выражения (89), и быстро меняющаяся фаза будет равна

$$\omega(\bar{\eta})=-c\left[\operatorname{ch}\bar{\xi}\cos\bar{\eta}\,(\cos\eta+\cos\eta')+\operatorname{sh}\bar{\xi}\sin\bar{\eta}\,(\sin\eta+\sin\eta')\right]. \tag{101}$$

Точка стационарной фазы η_0 определяется соотношениями

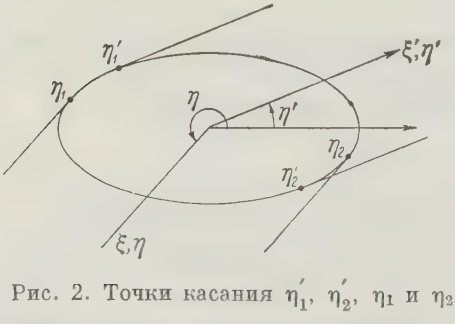


Рис. 2. Точки касания η_1', η_2', η_1 и η_2

$$\cos\frac{\eta+\eta'}{2}=\frac{\operatorname{sh}\bar{\xi}\cos\eta_0}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi}-\cos^2\eta_0}},$$

$$\sin\frac{\eta+\eta'}{2}=\frac{\operatorname{ch}\bar{\xi}\sin\eta_0}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi}-\cos^2\eta_0}},$$

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi}-\cos^2\eta_0}=\frac{\operatorname{ch}\bar{\xi}\operatorname{sh}\bar{\xi}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\bar{\xi}-\sin^2\frac{\eta+\eta'}{2}}}, \tag{102}$$

причем $\omega''(\eta_0)=-\omega(\eta_0)\neq 0$. Обычный метод стационарной фазы приводит к формуле

$$\gamma(\eta,\eta')=\mp\sqrt{\frac{k\rho(\eta_0)}{2}\cos\frac{\eta-\eta'}{2}}\,e^{i\omega(\eta_0)}=\mp[M(\eta_0)]^{3/2}\sqrt{\cos\frac{\eta-\eta'}{2}}\,e^{i\omega(\eta_0)}, \tag{103}$$

которая соответствует геометрической оптике (ср. формулы (51)) и смыкается с формулами (99) и (100), поскольку при больших отрицательных аргументах ζ функции $\hat{f}(\zeta)$ и $\hat{g}(\zeta)$ приближенно равны:

$$\hat{f}(\zeta)=\frac{\sqrt{-\zeta}}{2}e^{-\frac{i}{12}\zeta^3},\quad \hat{g}(\zeta)=-\frac{\sqrt{-\zeta}}{2}e^{-\frac{i}{12}\zeta^3}. \tag{104}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты этой работы легко обобщаются на выпуклый илиндр произвольной формы (овальный, параболический, гиперболи-еский и т. д.). Если точка наблюдения и источник лежат вблизи по-ерхности цилиндра, то применимы формулы (46) и (47), в которых еличина $M(\eta)$ связана с радиусом кривизны цилиндра $\rho(\eta)$ соотно-ением

$$M(\eta) = \left[\frac{k\rho(\eta)}{2}\right]^{1/3}, \tag{105}$$

σ, x, y и y' очевидно равны:

$$\sigma = k\int dl, \quad x = \frac{k}{2}\int \frac{dl}{M^2(\eta)}, \quad y = \frac{kh}{M(\eta)}, \quad y' = \frac{kh'}{M(\eta')}, \tag{106}$$

де dl — элемент дуги граничного контура, а h' и h — кратчайшее рас-тояние источника и точки наблюдения до поверхности цилиндра (мы ять обозначаем координаты точки наблюдения через ξ, η и коорди-аты источника — через ξ', η'). Если одна из точек удаляется в беско-ечность ($\xi' \to \infty$), то соответствующая ей координата η' теряет свой словный характер и становится полярным углом, а функция Грина ринимает вид

$$\Gamma(\xi, \eta; \xi', \eta') = \sqrt{\frac{2\pi}{kr'}}\, e^{i\left(kr' + \frac{\pi}{4}\right)}\Gamma(\xi, \eta; \eta'), \tag{107}$$

де r' — радиус-вектор. Для функции $\Gamma(\xi, \eta; \eta')$ применима формула 7), которую при больших отрицательных $\epsilon_\nu(x - x'_\nu)$ надо дополнить аконами геометрической оптики (см. [8]). Последние для функций (78) (80) имеют вид (89), где ω_0 есть фаза плоской волны на поверхно-ти цилиндра.

Если обе точки удаляются в бесконечность ($\xi \to \infty$, $\xi' \to \infty$), то редставляет интерес характеристика рассеяния $\gamma(\eta, \eta')$, определяемая тотношением

$$\gamma(\xi, \eta; \eta') = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}\gamma(\eta, \eta'), \tag{108}$$

де $\gamma(\xi, \eta; \eta')$ есть «вторичная» часть функции $\Gamma(\xi, \eta; \eta')$ — волна, рас-еянная цилиндром, а r, η — полярные координаты точки наблюдения. арактеристика рассеяния $\gamma(\eta, \eta')$ для произвольного выпуклого ци-индра вычисляется по формулам (99), (100) и (103).

Напомним, что каждая функция Γ или γ соответствует дифракцион-ому или обычному лучу (или же паре обычных лучей) и интересующая ас функция Грина G согласно формуле (14) равна сумме вкладов от всех учей, причем дифракционные лучи, обежавшие цилиндр более одного аза, дают, как правило, пренебрежимо малый вклад.

Пределы применимости этих асимптотических формул можно оценить ри помощи численных результатов, полученных ранее для сферы [9, 0] и кругового цилиндра [11]. А именно, характеристики рассеяния дол-ны передаваться этими формулами уже при $k\rho_{\text{мин}} > 5$, а функции Γ_α и — при $k\rho_{\text{мин}} > 10$, где $\rho_{\text{мин}}$ — минимальный радиус кривизны цилиндра.

Заметим, что непосредственное построение ряда, аналогичного ряду 7), было произведено ранее для других задач (см., например, [14]). днако преобразование ряда в контурный интеграл делает метод более гиб-им и эффективным. В частности, контурные интегралы (49), (63), (69), 2), (79) и (81), введенные В. А. Фоком и табулированные в [15], передают

превращение дифракционных лучей в обычные и наоборот. Таким образом, мы получили более полное решение, чем Дж. Б. Келлер [12], который ограничился рядами вычетов (расходящимися при $x<0$).

Данный метод можно применить для асимптотического решения тех дифракционных задач (как электродинамических, так и акустических), которые допускают разделение переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, ЖЭТФ, 1945, **15**, 12, 693.
2. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. АН СССР, 1946.
3. В. А. Фок, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1946, **10**, 2, 171.
4. М. Леонтович, В. Фок, ЖЭТФ, 1946, **16**, 7, 557.
5. В. А. Фок, ЖЭТФ, 1949, **19**, 10, 916.
6. В. А. Фок, Успехи физ. наук, 1948, **36**, 3, 308.
7. В. А. Фок, Успехи физ. наук, 1950, **43**, 4, 587.
8. В. А. Фок, ЖЭТФ, 1950, **20**, 11, 961.
9. М. Г. Белкина, Л. А. Вайнштейн, Сб. статей «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения», Изд. Советское радио, 1957, стр. 57—125.
10. А. А. Федоров, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 12, 1451.
11. А. С. Горяинов, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 5, 603 (см. также Докл. АН СССР, 1956, **109**, 3, 417).
12. J. B. Keller, IRE Trans., 1956, **AP-4**, 3, 312.
13. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, Higher transcendental functions, Bateman manuscript project, McGraw-Hill, 2, 1953.
14. А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950, стр. 298—312.
15. П. А. Азрилянт, М. Г. Белкина, Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. Советское радио, 1957.
16. В. А. Фок, Радиотехника и электроника, 1956, **1**, 5, 560.

Поступила в редакцию
3 V 1960

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ ОСИ КОНУСА

А. С. Горянов

Приведено строгое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечном проводящем конусе в случае, когда плоская волна распространяется вдоль оси конуса. В области, где рассеянное поле имеет вид сферической волны, выведены формулы, пригодные для численного расчета характеристик рассеяния, и приведены результаты их расчета. Получены формулы для функций поправочного поля, обусловленного сужением поверхности у острия конуса. Приведенные графики для этих функций позволяют оценить роль острия при дифракции электромагнитных волн.

ВВЕДЕНИЕ

При дифракции электромагнитных волн на конечной конической поверхности дифракционное поле можно считать суммарным и состоящим из поля, определенного по законам физической оптики, и поправочного поля, обусловленного добавочными токами вблизи края и острия конуса. Поле физической оптики определяется как поле, создаваемое током, плотность которого выражена через вектор магнитной напряженности $\vec{H}$ падающей волны известным соотношением

$$\vec{j} = \frac{c}{2\pi}\left[\vec{n}\vec{H}\right] \qquad (1)$$

($\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности). Вблизи острия конуса к току, определенному по формуле (1), добавляется ток, возникновение которого связано с резким сужением поверхности у острия. Этот добавочный ток сосредоточен в основном вблизи острия, и поэтому поправочное поле, им обусловленное, у конечного и бесконечного конусов одинаково, если $l\gamma \gg \lambda$, где l — длина образующей конечного конуса; λ — длина волны; угол γ обозначен на рис. 1. В этом случае поправочное поле, обусловленное острием, можно определить как разность между полем, полученным при строгом решении задачи о бесконечном конусе, и полем, полученным для того же по законам физической оптики. Ввиду локальности добавочного тока поправочное поле на больших расстояниях от острия конуса будет иметь вид сферической волны.

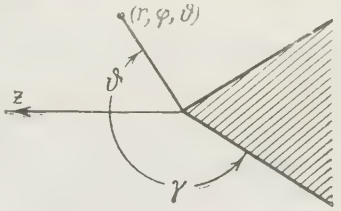


Рис. 1

В данной работе рассмотрено строгое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечном конусе с углом раствора $\pi - \gamma) < \pi$ в случае, когда плоская волна распространяется вдоль оси конуса. В области $0 \leqslant \vartheta < 2\gamma - \pi$, где рассеянное поле имеет вид сферической волны, выведены формулы, пригодные для численного расчета характеристик рассеяния, и приведены результаты их расчета. Получены также функции для расчета членов в характеристиках рассеяния, соответствующих поправочному полю, и приведены графики для этих функций в той же области $0 \leqslant \vartheta < 2\gamma - \pi$.

Таким образом, работа в основном посвящена исследованию влияния острия конуса на дифракционное поле. Дифракцию на краях конечного конуса можно учесть, используя результаты работы [1].

1. СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ

При исследовании дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем бесконечном конусе в пустоте воспользуемся потенциалами Дебая (u, v), через которые составляющие электромагнитного поля в сферической системе координат (r, φ, ϑ) определяются по формулам

$$\begin{aligned}
E_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)(ru), \\
E_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\vartheta}(ru) + \frac{ik}{\sin\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}, \\
E_\varphi &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(ru) - ik\frac{\partial v}{\partial\vartheta}, \\
H_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)(rv), \\
H_\vartheta &= -\frac{ik}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\vartheta}(rv), \\
H_\varphi &= ik\frac{\partial u}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(rv),
\end{aligned} \tag{2}$$

где k — волновое число в пустоте. Потенциалы Дебая являются решением волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \Delta v + k^2 v = 0; \tag{3}$$

наличие конуса $\vartheta = \gamma$, $\pi/2 < \gamma < \pi$ (рис. 1) учитывается граничным условием

$$E_r = E_\varphi = 0 \quad \text{при } \vartheta = \gamma.$$

При падении вдоль отрицательной оси z плоской электромагнитной волны

$$E_x^0 = -H_y^0 = e^{-ikz}$$

(временно́й множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и в дальнейшем опущен) полное дифракционное поле имеет потенциалы

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{\pi\cos\varphi}{ik^2 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\nu_n+1)\,e^{-i\frac{\pi\nu_n}{2}}}{\nu_n(\nu_n+1)\sin\pi\nu_n}\,\frac{P^1_{\nu_n}(-\cos\gamma)}{\dfrac{\partial}{\partial\nu_n}P^1_{\nu_n}(\cos\gamma)}\,P^1_{\nu_n}(\cos\vartheta)\,\psi_{\nu_n}(kr), \\
v &= \frac{\pi\sin\varphi}{ik^2 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\mu_n+1)\,e^{-i\frac{\pi\mu_n}{2}}}{\mu_n(\mu_n+1)\sin\pi\mu_n}\,\frac{\dfrac{d}{d\gamma}P^1_{\mu_n}(-\cos\gamma)}{\dfrac{\partial^2}{\partial\mu_n\partial\gamma}P^1_{\mu_n}(\cos\gamma)}\,P^1_{\mu_n}(\cos\vartheta)\,\psi_{\mu_n}(kr),
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $P^1_\nu(\cos x)$ — присоединенная функция Лежандра; $\psi_\nu(x)$ — сферическая функция Бесселя, связанная с обычной функцией Бесселя соотношением

$$\psi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(x);$$

числа ν_n и μ_n являются собственными значениями граничной задачи и определяются из уравнений

$$P^1_{\nu_n}(\cos\gamma) = 0, \quad \frac{d}{d\gamma}P^1_{\mu_n}(\cos\gamma) = 0.$$

Решение (4) является строгим, оно удовлетворяет всем известным требованиям, способ его получения приведен в [2]. Рядам (4) присущ

ычные недостатки строгих решений дифракционных задач: медленная одимость при больших значениях параметра kr, трудность нахожде- я собственных значений, невозможность физической интерпретации шения, присутствие нетабулированных функций. Поэтому преобразуем я дальнейшего анализа ряды (4) в контурные интегралы, используя рему о вычетах:

$$u = \frac{\cos\varphi}{2k^2r}\int\limits_{D_1}\frac{(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)}\frac{e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}}{\sin\pi\nu}\frac{P_\nu^1(-\cos\gamma)}{P_\nu^1(\cos\gamma)}P_\nu^1(\cos\vartheta)\,\psi_\nu(kr)\,d\nu,$$

$$v = -\frac{\sin\varphi}{2k^2r}\int\limits_{D_2}\frac{(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)}\frac{e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}}{\sin\pi\nu}\frac{\frac{d}{d\gamma}P_\nu^1(-\cos\gamma)}{\frac{d}{d\gamma}P_\nu^1(\cos\gamma)}P_\nu^1(\cos\vartheta)\,\psi_\nu(kr)\,d\nu.$$

итур D_1 (или D_2) охватывает нули функции $P_\nu^1(\cos\gamma)\left(\text{или }\frac{d}{d\gamma}P_\nu^1(\cos\gamma)\right)$, лючая точку $\nu=0$. Прове- контуры C, C_1 и L, как азано на рис. 2. Заменим егрирование по контуру D_1 и D_2) интегрированием по турам C_1 и C (контур L атывает нули $\sin\pi\nu$, начи- с $\nu=1$), после чего в ин- рале по контуру C_1 прове- замену ν на $\nu-\frac{1}{2}$, а ин- алы по контуру L предста- рядами вычетов, тогда

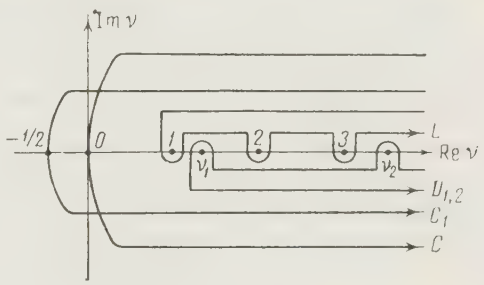


Рис. 2

$$u = u_1 + u_0, \quad v = v_1 + v_0,$$

$$u_1 = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\cos\varphi}{k^2r}\int\limits_C \nu e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}P_1(\nu)\,\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,d\nu - i\cos\varphi\,\mathrm{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}\frac{\sin kr}{k^2r};$$

$$v_1 = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\sin\varphi}{k^2r}\int\limits_C \nu e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}P_2(\nu)\,\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,d\nu - i\sin\varphi\,\mathrm{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}\frac{\sin kr}{k^2r};$$

$$u_0 = -\frac{i\cos\varphi}{k^2r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}i^n\frac{P_n^1(-\cos\gamma)}{P_n^1(\cos\gamma)}P_n^1(\cos\vartheta)\,\psi_n(kr);$$

$$v_0 = \frac{i\sin\varphi}{k^2r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}i^n\frac{\frac{d}{d\gamma}P_n^1(-\cos\gamma)}{\frac{d}{d\gamma}P_n^1(\cos\gamma)}P_n^1(\cos\vartheta)\,\psi_n(kr);$$

$$P_1(\nu) = \frac{P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma)\,P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)}{P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\cos\pi\nu};$$

$$P_2(\nu) = \frac{\frac{d}{d\gamma}P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma)\,P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)}{\frac{d}{d\gamma}P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\cos\pi\nu}.$$

(5)

Вторые слагаемые в (5) дают вычеты в точке $\nu = 0$ при переходе от контуров $D_{1,2}$ к контуру C_1. В силу формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^n P^1{}_n(\cos\vartheta)\,\psi_n(kr) = \\ = \frac{i}{\sin\vartheta}(\cos kr - i\cos\vartheta \sin kr - e^{-ikr\cos\vartheta}) \tag{6}$$

и соотношения для целых n

$$P^1_n(-x) = (-1)^{n-1} P^1_n(x),$$

получаем

$$u_0 = -\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta\, k^2 r}(\cos kr - i\cos\vartheta\sin kr - e^{-ikr\cos\vartheta}),$$

$$v_0 = \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta\, k^2 r}(\cos kr - i\cos\vartheta\sin kr - e^{-ikr\cos\vartheta}).$$

Подстановкой u_0 и v_0 в формулы (2) убеждаемся, что потенциалы (u_0, v_0) дают поле падающей волны.

Таким образом, преобразование рядов (4) в интегралы сразу же позволило разделить потенциалы полного дифракционного поля (u, v) на потенциалы падающей волны (u_0, v_0) и потенциалы вторичного (рассеянного) поля (u_1, v_1). Интегральное представление потенциалов (5) позволяет также для области $\vartheta < 2\gamma - \pi$ получить дифракционное поле в волновой зоне в виде сферической волны. Действительно, благодаря асимптотическому поведению присоединенной функции Лежандра и сферической функции Бесселя

$$\left.\begin{aligned} P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta) &= \sqrt{\frac{2\nu}{\pi\sin\vartheta}}\cos\left(\nu\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) + O(\nu^{-1/2}), \\ \psi_{\nu-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{\sqrt{x}}{2} e^{\nu+\nu\ln\frac{x}{2} - \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\ln\nu}, \\ |\nu| &\geqslant 1,\ |\arg\nu| \leqslant \pi - \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

в выражениях (5) интегрирование по контуру C можно заменить интегрированием по мнимой оси. После этого, пользуясь четностью присоединенных функций Лежандра по переменной ν, а также соотношением

$$e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(x) + e^{i\frac{\pi\nu}{2}}\psi_{-\nu-\frac{1}{2}}(x)\right] - \\ - \frac{i}{2} e^{i\frac{\pi\nu}{2}} \sin\pi\nu\,\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(x),$$

где $\zeta_\nu(x)$ — сферическая функция Ханкеля, определяемая при помощи обычной функции Ханкеля равенством

$$\zeta_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}(x),$$

получим

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\cos\varphi}{k^2 r}\int_0^\infty \nu e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \operatorname{sh}\pi\nu P_1(i\nu)\,\zeta_{i\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,d\nu - \\ &\quad - i\cos\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\frac{\sin kr}{k^2 r}, \\ v_1 &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\sin\varphi}{k^2 r}\int_0^\infty \nu e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \operatorname{sh}\pi\nu P_2(i\nu)\,\zeta_{i\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,d\nu - \\ &\quad - i\sin\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\frac{\sin kr}{k^2 r}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

при $kr \gg \nu_0$, где ν_0 — то значение переменного, начиная с которого интегрированием в (8) можно пренебречь, сферическую функцию Ханкеля заменим ее асимптотическим представлением

$$\zeta_{i\nu-\frac{1}{2}}(kr) = e^{i\left(kr-\frac{i\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

При помощи формул (2) составляющие электромагнитного дифракционного поля в волновой зоне для области $\vartheta < 2\gamma - \pi$ запишутся теперь в виде

$$E_r^1 = H_\vartheta^1 = 0,\ E_\nu^1 = H_\varphi^1 = \cos\varphi L_1^1(\vartheta,\gamma)\frac{e^{ikr}}{ikr},$$

$$E_\varphi^1 = -H_\vartheta^1 = -\sin\varphi L_2^1(\vartheta,\gamma)\frac{e^{ikr}}{ikr},$$

где

$$\left.\begin{aligned} L_1^1(\vartheta,\gamma) &= \frac{d}{d\vartheta}\int_0^\infty \nu\,\mathrm{sh}\,\pi\nu P_1(i\nu)\,d\nu - \frac{1}{\sin\vartheta}\int_0^\infty \nu\,\mathrm{sh}\,\pi\nu P_2(i\nu)\,d\nu + \frac{\mathrm{ctg}^2\frac{\gamma}{2}}{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}},\\ L_2^1(\vartheta,\gamma) &= \frac{1}{\sin\vartheta}\int_0^\infty \nu\,\mathrm{sh}\,\pi\nu P_1(i\nu)\,d\nu - \frac{d}{d\vartheta}\int_0^\infty \nu\,\mathrm{sh}\,\pi\nu P_2(i\nu)\,d\nu + \frac{\mathrm{ctg}^2\frac{\gamma}{2}}{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

В волновой зоне при $\vartheta = 2\gamma - \pi$ (направление зеркального отражения) сферическая волна разворачивается в коническую волну, распространяющуюся в области $\vartheta > 2\gamma - \pi$. Это находит отражение в том, что при $\vartheta \geqslant 2\gamma - \pi$ интегралы в (9) расходятся.

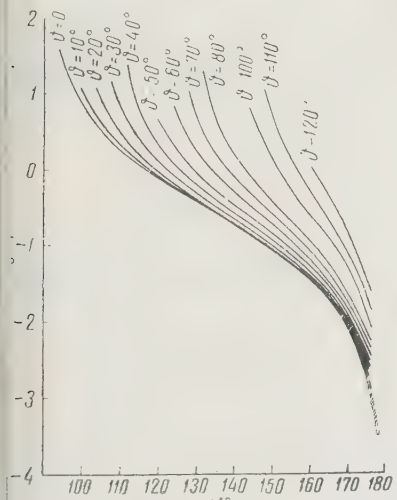


Рис. 3

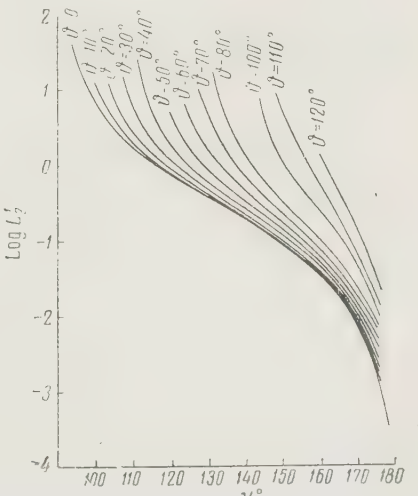


Рис. 4

Функции $L_{1,2}^1(\vartheta,\gamma)$ можно назвать характеристиками рассеяния сферической волны на конусе. Они положительны, вещественны, монотонно возрастают при $\vartheta \to 2\gamma - \pi$. Функции $L_{1,2}^1(\vartheta,\gamma)$ были вычислены на электронной машине «Стрела» для $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\gamma - \pi - 2°$, $96° \leqslant \gamma \leqslant 178°$; $\Delta\vartheta = 2°$, $\Delta\gamma = 2°$. Для этих вычислений потребовалось около 40 *час* машинного времени. Результаты для некоторых параметров представлены на рис. 3 и 4.

Для узкоугольных ($\gamma \leqslant \pi$) и широкоугольных ($\gamma \geqslant \pi/2$) конусов выражения (9) при $\vartheta = 0$ можно упростить, применяя в первом случае

приближенные формулы

$$P^1_{i\nu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ch}\pi\nu,\quad P^1_{i\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma) = -\frac{1}{2}\left(\nu^2+\frac{1}{4}\right)\sin\gamma,$$

а во втором случае, используя первую формулу (7). Для узкоугольных конусов характеристики рассеяния приближенно равны

$$L^1_{1,2}(\vartheta,\gamma) = \left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)^2,$$

для широкоугольных конусов

$$L^1_{1,2}(\vartheta,\gamma) = \frac{1}{(2\gamma-\pi)^2}.$$

Эти результаты согласуются с результатами, приведенными в [3], и с формулами физической оптики.

2. ПОЛЕ СОГЛАСНО ЗАКОНАМ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Потенциалы физической оптики u_p, v_p (значком p мы обозначаем величины, относящиеся к решению физической оптики), удовлетворяющие уравнениям (3), будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} u_p &= \frac{\cos\varphi}{r}\int_{C_2} F(\nu)\,\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\begin{Bmatrix} P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\,P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma) \\ P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\vartheta)\,P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\end{Bmatrix} d\nu, \\ v_p &= \frac{\sin\varphi}{r}\int_{C_2} G(\nu)\,\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\begin{Bmatrix} P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\,\frac{d}{d\gamma}P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma) \\ P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\vartheta)\,\frac{d}{d\gamma}P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\end{Bmatrix} d\nu, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где верхнюю строчку в фигурных скобках надо брать при $\vartheta<\gamma$, а нижнюю — при $\vartheta>\gamma$. Контур C_2 изображен на рис. 5. Граничные условия следуют из соотношения (1) и могут быть записаны в виде

$$H^p_r\big|_{\vartheta=\gamma-0} - H^p_r\big|_{\vartheta=\gamma+0} = 2H^0_r,$$
$$H^p_\varphi\big|_{\vartheta=\gamma-0} - H^p_\varphi\big|_{\vartheta=\gamma+0} = 2H^0_\varphi,$$

где составляющие вектора магнитной напряженности падающей волны

$$H^0_r = -\sin\varphi\sin\gamma e^{-ikr\cos\gamma},$$
$$H^0_\varphi = -\cos\varphi e^{-ikr\cos\gamma}.$$

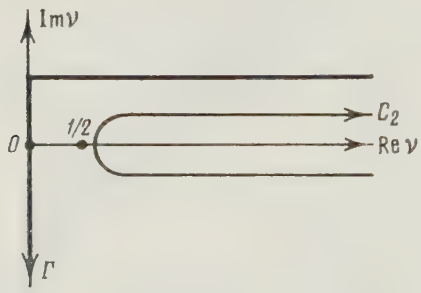


Рис. 5

Эти граничные условия при помощи формул (2) и выражения для вронскиана

$$P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\frac{d}{d\gamma}P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma) - \frac{d}{d\gamma}P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\,P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma) = \frac{2}{\pi\sin\gamma}\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\cos\pi\nu \quad (11)$$

приведем к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\pi r^2\sin^2\gamma}\int_C G(\nu)\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)^2\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\cos\pi\nu d\nu = -e^{-ikr\cos\gamma}, \\ &\frac{ik}{\pi r\sin\gamma}\int_{C_2} F(\nu)\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\cos\pi\nu d\nu - \frac{k}{\pi r\sin^2\gamma}\int_{C_2} G(\nu)\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\times \\ &\qquad\times\frac{d}{d(kr)}\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\cos\pi\nu\,d\nu = e^{-ikr\cos\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Для определения функции $G(\nu)$ помножим первое уравнение (12) на $\zeta_{\mu-\frac{1}{2}}(kr)$ (где $\mathrm{Re}\,\nu > \mathrm{Re}\,\mu$) и проинтегрируем по r от 0 до ∞, тогда получаем

$$ik\int\limits_{C_2} G(\nu)\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)^2\cos\pi\nu\,\frac{e^{i(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}}}{\nu^2-\mu^2}\,d\nu =$$

$$= \pi\sin^2\gamma\int\limits_0^\infty e^{-ikr\cos\gamma}\zeta_{\mu-\frac{1}{2}}(kr)\,dr. \qquad (13)$$

При этом мы изменили порядок интегрирования и воспользовались соотношением

$$\int\limits_0^\infty \zeta_{\mu-\frac{1}{2}}(kr)\,\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,\frac{dr}{r^2} = -\frac{ik}{\nu^2-\mu^2}e^{i(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}},\ \mathrm{Re}\,\nu > \mathrm{Re}\,\mu.$$

В дальнейшем для определения функции $G(\nu)$ из уравнения (13) мы следуем методу, подробно изложенному в [4]; в результате получаем

$$G(\nu) = -\frac{\sin^2\gamma}{k}\,\frac{\nu}{\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)^2\cos\pi\nu}\int\limits_0^\infty e^{-ikr\cos\gamma}\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,dr. \qquad (14)$$

При нахождении функции $F(\nu)$ воспользуемся тем, что

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+k^2\right)\psi_\nu(kr) = \frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\psi_\nu(kr).$$

Применяя оператор $\left(\frac{d^2}{dr^2}+k^2\right)$ к левой и правой частям второго уравнения (12) и используя формулу (14), получим

$$\frac{1}{r^2}\int\limits_{C_2} F(\nu)\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)^2\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\cos\pi\nu\,d\nu = -\pi\sin\gamma(\cos\gamma + ikr\sin^2\gamma)\,e^{-ikr\cos\gamma}.$$

Используя тот же прием, что и при решении уравнения (13), получим

$$F(\nu) = -\frac{\nu}{\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)^2\cos\pi\nu}\left[i\sin^3\gamma\int\limits_0^\infty e^{-ikr\cos\gamma}\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,r\,dr + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\gamma\sin\gamma}{k}\int\limits_0^\infty e^{-iks\gamma}\quad\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,dr\right]. \qquad (15)$$

Входящие в правые части равенств (14) и (15) интегралы можно вычислить при помощи формулы

$$\left.\int\limits_0^\infty e^{-ikr\cos\gamma}\,r^q\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,dr = \frac{\pi e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(ik\sin\gamma)^{q+1}}\,\frac{e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}}{\cos\pi\nu}\,P^{(q+1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma),\right\} \qquad (16)$$

$$\left.\mathrm{Re}\left(q+\frac{3}{2}\pm\nu\right)>0,\ \mathrm{Im}\,k>0.\right\}$$

Эту формулу можно получить, выразив значение интеграла через гипергеометрическую функцию, которая является одним из представлений присоединенной функции Лежандра (см. [5]).

Заменим правые части в равенствах (14) и (15) по формуле (16) и подставим значения $G(\nu)$ и $F(\nu)$ в (10), тогда получим интегральные представления для потенциалов физической оптики; в области $\vartheta<\gamma$ будем иметь

$$\frac{u_p}{\cos\varphi}=\frac{v_p}{\sin\varphi}=\frac{\pi e^{i\frac{\pi}{4}}\sin\gamma}{k^2r}\int_{C_2}\frac{\nu e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}}{\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)^2\cos^2\pi\nu}P_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma)\times$$

$$\times\frac{d}{d\gamma}P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma)P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta)\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\,d\nu, \qquad (17)$$

Для проверки правильности найденного решения подставим значения функций $G(\nu)$ и $F(\nu)$, даваемые формулами (14) и (15), предварительно применив формулу (16), в уравнение (12). Получающиеся при этом интегралы представим рядами вычетов, после чего при помощи формулы (6) убеждаемся, что произведенная подстановка обращает уравнения (12) в тождества.

Таким образом мы получили интегральное представление потенциалов согласно физической оптике; оно похоже на интегральное представление потенциалов строгого решения: оба решения построены при помощи присоединенных функций Лежандра и сферических функций Бесселя, а контуры интегрирования охватывают положительную часть вещественной оси. Это обстоятельство позволяет довольно просто представить потенциалы поправочного поля в волновой зоне в виде сферической волны, распространяющейся от вершины конуса.

Как было отмечено ранее, для волновой зоны в области $\vartheta<2\gamma-\pi$ было проведено вычисление характеристик рассеяния $L_{1,2}(\vartheta,\gamma)$, поэтому в указанной области нет необходимости производить особые вычисления поправочного поля. Для этого достаточно вывести простые формулы физической оптики для $kr\gg1$ и $\vartheta<2\gamma-\pi$. Эти формулы можно вывести, составив выражение для вектор-потенциала с использованием тока, определяемого формулой (1). Преобразования, встречающиеся при этом, элементарны; окончательные выражения имеют вид

$$E^p_r=H^p_r=0,\ E^p_\vartheta=H^p_\varphi=\cos\varphi L(\vartheta,\gamma)\frac{e^{ikr}}{ikr},\ E^p_\varphi=-H^p_\vartheta=$$

$$=-\sin\varphi L(\vartheta,\gamma)\frac{e^{ikr}}{ikr},$$

$$kr\gg1,\ 0\leqslant\vartheta<2\gamma-\pi,$$

где

$$L(\vartheta,\gamma)=\left|\frac{\sin^2\gamma\cos\gamma}{4\cos\frac{\vartheta}{2}\left[\cos\left(\gamma-\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\gamma+\frac{\vartheta}{2}\right)\right]^{3/2}}\right|; \qquad (18)$$

в частности, при $\vartheta=0$ получаем хорошо известные формулы

$$E^p_\vartheta=-H^p_\varphi=\frac{1}{4}\sin\varphi\,\mathrm{tg}^2\gamma\frac{e^{ikr}}{ikr},$$

$$E^p_\varphi=-H^p_\vartheta=-\frac{1}{4}\cos\varphi\,\mathrm{tg}^2\gamma\frac{e^{ikr}}{ikr}.$$

Найденные численные значения характеристик рассеяния $L_{1,2}(\vartheta,\gamma)$ по формулам (9) вместе с простой формулой (18) решают вопрос о точности физической оптики в области, где рассеянное поле имеет вид сферической волны ($kr\gg1$, $\vartheta<2\gamma-\pi$), а также позволяет численно определить величину поправочного поля в этой области.

3. ПОПРАВОЧНОЕ ПОЛЕ

По определению потенциалы поправочного поля (u_q, v_q) определяются виде

$$u_q = u_1 - u_p, \quad v_q = v_1 - v_p.$$

одставим в эту формулу найденные ранее потенциалы строгого решения) и потенциалы физической оптики (17), причем в последних контур C_2 иведем предварительно к контуру C; тогда при помощи вронскиана (11) олучим

$$u_q = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{k^2 r}\cos\varphi\, I_1(\vartheta, r, \gamma), \quad v_q = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{k^2 r}\sin\varphi\, I_2(\vartheta, r, \gamma),$$

де

$$I_{1,2}(\vartheta, r, \gamma) = \int_C \nu e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} P_{1,2}(\nu)\, f(\nu)\, \psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\, d\nu;$$

$$f(\nu) = -\frac{\pi}{2}\frac{\sin\gamma}{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\cos\pi\nu}\frac{d}{d\gamma}\left[P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\gamma)\, P^1_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\gamma)\right].$$

Покажем, что для всех значений ϑ в волновой зоне u_q, v_q являются отенциалами сферической волны. Для этого представим интегралы $_{1,2}(\vartheta, r, \gamma)$ в виде

$$\left.\begin{aligned} I_{1,2}(\vartheta, r, \gamma) = \int_C \nu e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} P_{1,2}(\nu)\,[f(\nu) - F(\nu)]\,\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\, d\nu + \\ + \int_C \nu e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} P_{1,2}(\nu)\, F(\nu)\, \psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)\, d\nu, \\ F(\nu) = \frac{\sin[(2\gamma - \pi)\nu]}{\cos\pi\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

ри помощи первой формулы (7) легко убедиться, что при $|\nu| \gg 1$, $|\arg\nu| \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$f(\nu) = F(\nu) + O(\nu^{-1}),$$

модули функций $\nu e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} P_{1,2}(\nu)[f(\nu) - F(\nu)]$ убывают как $\nu^{-3/2}$. Это бстоятельство дает возможность сферическую функцию Бесселя для олновой зоны в первом интеграле правой части (19) заменить ее асимптотическим выражением

$$\psi_{\nu-\frac{1}{2}}(kr) = \cos\left(kr - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{20}$$

Во втором интеграле равенства (19) интегрирование по контуру C меним интегрированием по мнимой оси, что возможно благодаря имптотическим формулам (7). Повторяя затем те же рассуждения, о и при преобразовании формул (8), заменим в этом интеграле сфе-

рическую функцию Бесселя выражением (20) и получим

$$I_{1,2}(\vartheta, r, \gamma) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} e^{ikr} \int_C \nu e^{-i\pi\nu} P_{1,2}(\nu)\,[f(\nu) - F(\nu)]\,d\nu +$$

$$+ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} e^{-ikr} \int_C \nu P_{1,2}(\nu)\,[f(\nu) - F(\nu)]\,d\nu +$$

$$+ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} e^{-ikr} \int_{i\infty}^{-i\infty} \nu P_{1,2}(\nu)\,F(\nu)\,d\nu + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} e^{ikr} \int_{i\infty}^{-i\infty} \nu e^{-i\pi\nu} P_{1,2}(\nu)\,F(\nu)\,d\nu.$$

Если теперь во втором интеграле правой части заменить контур C мнимой осью, то слагаемые с множителем e^{-ikr} исчезают в силу четности функций $P_{1,2}(\nu)$ и $f(\nu)$. Окончательно получаем

$$\left.\begin{aligned} u_q &= -\frac{\cos\varphi}{2k^2 r} e^{ikr} \left\{ \int_C \nu e^{-i\pi\nu} P_1(\nu)\,[f(\nu) - F(\nu)]\,d\nu - \right. \\ &\qquad \left. - 2\int_0^{i\infty} \nu \cos\pi\nu\; P_1(\nu)\,F(\nu)\;d\nu \right\}, \\ v_q &= -\frac{\sin\varphi}{2k^2 r} e^{ikr} \left\{ \int_C \nu e^{-i\pi\nu} P_2(\nu)\,[f(\nu) - F(\nu)]\,d\nu - \right. \\ &\qquad \left. - 2\int_0^{i\infty} \nu \cos\pi\nu P_2(\nu)\;F(\nu)\,d\nu \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

В этих выражениях контур C можно заменить контуром Г, изображенным на рис. 5. Интегралы в выражениях (21) сходятся для всей области изменения параметра ϑ. Численное определение неравномер-

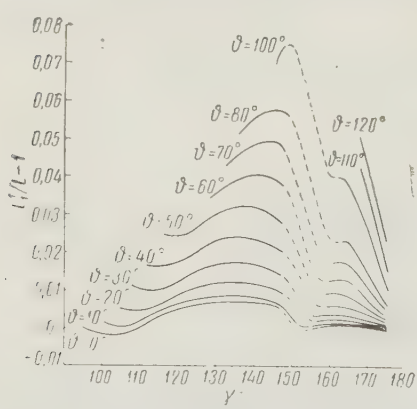


Рис. 6

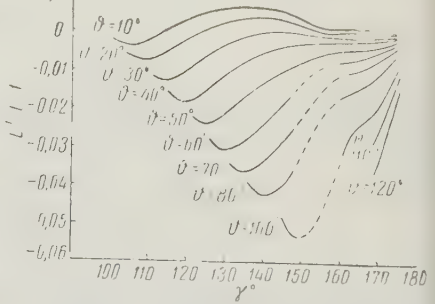


Рис. 7

ной составляющей поля при помощи формул (21) не проводилось, но для области $\vartheta < 2\gamma - \pi$ рассчитаны функции $L^q_{1,2}(\vartheta, \gamma)$, соответствующие поправочному полю. Они определяются по формуле

$$L^q_{1,2}(\vartheta, \gamma) = L^1_{1,2}(\vartheta, \gamma) - L(\vartheta, \gamma).$$

Графики функций $\frac{L^q_{1,2}}{L} = \frac{L^1_{1,2}}{L} - 1$ для некоторых значений ϑ и γ приведены на рис. 6 и 7.

Из сравнения результатов, представленных на рис. 3, 4 и 6, 7, можно заключить, что поле физической оптики близко к истинному полю при $\vartheta \simeq 0$; при увеличении ϑ в интервале $0 \leqslant \vartheta < 2\gamma - \pi$ функции $q_{1,2}(\vartheta, \gamma)$ монотонно возрастают и дают поправку порядка 10%, что указывает на роль поправочного поля в дифракции на конечных телах, имеющих острие. На рис. 6 и 7 участки графической интерполяции представлены штрихованными линиями. При $\vartheta \simeq 0$ неравномерной составляющей, очевидно, можно пренебречь.

В заключение выражаю благодарность руководителю работы И. А. Вайнштейну.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Я. Уфимцев, Приближенный расчет дифракции плоских электромагнитных волн на некоторых металлических телах, ЖТФ, 1957, 27, 8, 1840.
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.
3. L. B. Felsen, Backscattering from wide-angle and narrow-angle cones, J. Appl. Phys., 1955, 26, 2, 138.
4. М. И. Конторович, Н. Н. Лебедев, Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем, ЖЭТФ, 1938, 8, 10—11, 1192.
5. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, 2, McGray-Hill, 1953, p. 50, 124.

Поступила в редакцию
14 V 1960

1961 № 1

ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ РЕШЕТКУ (СЛУЧАЙ, КОГДА ВЕКТОР *H* ПАРАЛЛЕЛЕН ПРОВОДАМ)

А. Н. Сивов

Решена электродинамическая задача по отысканию коэффициентов отражения и прохождения при наклонном падении плоской волны на плоскую решетку в случае, когда вектор H параллелен проводам решетки. Период решетки предполагается малым по сравнению с длиной волны. Учтены форма провода и диэлектрическое заполнение, различное, вообще говоря, по разные стороны от решетки. Полученные формулы допускают, в частности, предельный переход при неограниченном сближении проводов. Найдены также поля вблизи проводов. Получены эквивалентные граничные условия для решетки и системы решетка — металлический сплошной экран.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВВЕДЕНИЕ

На плоскую бесконечную решетку, образованную параллельными проводами, наклонно падает электромагнитная волна, у которой вектор магнитного поля ориентирован параллельно проводам. Диэлектрическое заполнение пространства однородно, но, вообще говоря, различно по разные стороны от решетки. В предположении малости периода решетки по сравнению с длиной волны нужно найти прошедшее и отраженное поля. Решение этой задачи предпринято для исследования затухания и фазовых характеристик волн в периодических волноводах с учетом периода, геометрии провода и диэлектрического заполнения.

Введем прямоугольную систему координат (x, ξ, y), связанную с решеткой следующим образом. Ось ox перпендикулярна проводам и лежит в плоскости решетки, $o\xi$ направлена вдоль проводов и проходит через центр сечения одного из них, oy совпадает с нормалью к плоскости решетки.

Пространство над $(y > 0)$ и под $(y < 0)$ решеткой заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1, ε_2. Во всем пространстве $\mu = 1$. Решетка образована параллельными идеально проводящими металлическими проводами произвольной формы поперечного сечения, имеющего, однако, две оси симметрии ox и oy. Период решетки p мал по сравнению с длиной волны в свободном пространстве λ, так что безразмерный параметр kp $(k = 2\pi/\lambda)$ есть малая величина. Зависимость полей от времени принимается в форме $\exp(i\omega t)$. Так как направления распространения волн перпендикулярны проводам и решетка однородна в направлении ξ, то задача плоская (поля не зависят от координаты ξ, т. е. $\partial \ldots/\partial\xi \equiv 0$). На рис. 1 выделен типичный участок поля, ограниченный контурами Γ_1 $(5'—4'—3'—2—3—4—5)$ и Γ_2 $(4—3—\bar{2}'—3'—4'—\bar{5}')$. Со стороны $y' < 0$ под углом φ_1 на решетку набегает плоская волна с составляющими H_ξ, E_x, E_y. Отраженная волна уходит в отрицательном направлении оси y'', прошедшая волна распространяется под углом преломления φ_2 $\left(\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\right)$ в положительном направлении оси $\bar{y}'$. Участки $5'—5$ и $\bar{5}'—\bar{5}$ находятся от решетки на расстояниях, обеспечивающих формирование плоских полей.

2. ВЫРАЖЕНИЕ ПОЛЕЙ В УДАЛЕННЫХ ЗОНАХ ЧЕРЕЗ ПОЛЯ НА КОНТУРЕ ПРОВОДА И НА ПЛОСКОСТИ $y = 0$

Для отыскания связи между полями в удаленных зонах (участки $\bar{5}-5$ и $5'-\bar{5}$) и полями вблизи проводов применим лемму Лоренца (см., например, [1]) к контурам Γ_1 и Γ_2. В качестве вспомогательных полей E^i, H^i $(i = 1; 2)$, фигурирующих в лемме, удобнее всего взять поля плоских волн в пространстве без решетки с плоской границей раздела диэлектриков при $y = 0$. Направления распространения вспомогательных волн выбираем так, чтобы они были «встречными» по отношению к истинным полям, т. е. поле E^1, H^1 (встречное поле по отношению к отраженной волне) есть поле волны, падающей на границу раздела в положительном направлении оси y'', поле E^2, H^2 (встречное по отношению к прошедшей волне) есть поле волны, падающей на границу раздела с противоположной стороны в отрицательном направлении оси $\bar{y}'$ (см. рис. 1).

Обозначим $\alpha_i = \sin\varphi_i$, $\beta_i = \cos\varphi_i$. Напишем выражения для истинных полей в удаленных зонах и для вспомогательных полей:

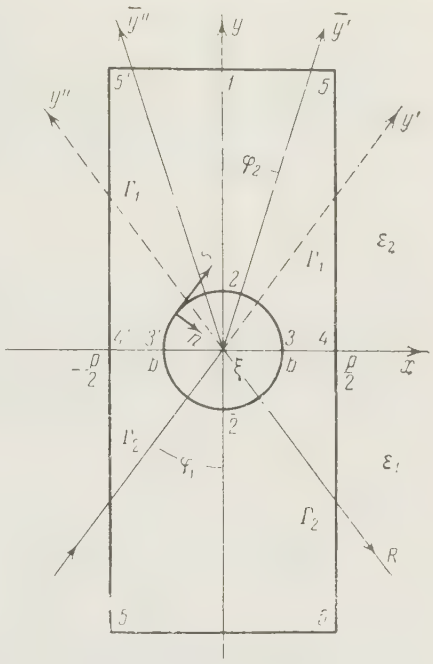


Рис. 1

$$
\left.\begin{aligned}
&H^2_\xi = Te^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}'}; \quad E^2_x = \frac{\beta_2 T}{\sqrt{\varepsilon_2}} e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}'}; \quad E^2_y = \frac{-\alpha_2 T}{\sqrt{\varepsilon_2}} e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}'};\\
&H^1_\xi = T_1 e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,y''}; \quad E^1_x = \frac{\beta_2 T_1}{\sqrt{\varepsilon_2}} e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,y''}; \quad E^1_y = \frac{\alpha_2 T_1}{\sqrt{\varepsilon_2}} e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,y''};\\
&H^2_\xi = e^{ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}'} + R_2 e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,y''}; \quad E^2_x = \frac{-\beta_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\left(e^{ik\sqrt{\varepsilon_2}\,\bar{y}'} - R_2 e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,y''}\right);\\
&E^2_y = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\left(e^{ik\bar{y}'\sqrt{\varepsilon_2}} + R_2 e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\,y''}\right);
\end{aligned}\right\} \quad y > 0 \qquad (1)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&H_\xi = e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'} + Re^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y''}; \quad E_x = \frac{\beta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'} - Re^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y''}\right);\\
&E_y = \frac{-\alpha_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'} + Re^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y''}\right);\\
&H^1_\xi = e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y''} + R_1 e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'}; \quad E^1_x = \frac{\beta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y''} - R_1 e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'}\right);\\
&E^1_y = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y''} + R_1 e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,y'}\right);\\
&H^2_\xi = T_2 e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,\bar{y}'}; \quad E^2_x = -\frac{\beta_1 T_2}{\sqrt{\varepsilon_1}} e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,\bar{y}'}; \quad E^2_y = \frac{\alpha_1 T_2}{\sqrt{\varepsilon_1}} e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\,\bar{y}'}
\end{aligned}\right\} \quad y < 0
$$

Здесь R и T — искомые коэффициенты отражения и прохождения; R_1 и T_1 — коэффициенты отражения и прохождения для вспомогательных полей, которые находятся из простой задачи о падении плоских волн на плоскую границу раздела двух однородных диэлектриков:

$$R_1 = \frac{\beta_1\sqrt{\varepsilon_2} - \beta_2\sqrt{\varepsilon_1}}{\beta_1\sqrt{\varepsilon_2} + \beta_2\sqrt{\varepsilon_1}}; \quad T_1 = \frac{2\beta_1\sqrt{\varepsilon_2}}{\beta_1\sqrt{\varepsilon_2} + \beta_2\sqrt{\varepsilon_1}}; \; R_2 = -R_1; \; T_2 = T_1\frac{\beta_2\sqrt{\varepsilon_1}}{\beta_1\sqrt{\varepsilon_2}}. \tag{2}$$

На прямых $\bar{5}' - 5'$ и $5 - \bar{5}$ выполняются соотношения

$$H(p/2) = H(-p/2)\,e^{-\gamma}; \; E(p/2) = E(-p/2)\,e^{-\gamma}; \tag{3}$$

$$H^i(p/2) = H^i(-p/2)\,e^{\gamma}; \; E^i(p/2) = E^i(-p/2)\,e^{\gamma}; \; \gamma = ik\sqrt{\varepsilon_1}\,\alpha_1 p.$$

Это приводит к исчезновению интегралов по участкам $5' - 5'$; $5 - \bar{5}$. Учитывая, что на контуре провода тангенциальная составляющая электрического поля E_s равна нулю, приходим к искомым соотношениям, связывающим поля в дальней зоне с полями на контуре провода и на линии $y = 0$ между проводами:

$$\int\limits_{(5'-\bar{5})} (E_x^i H_\xi - E_x H_\xi^i)\,dx = \int\limits_{(3'-\bar{2}-3)} E_s^i H_\xi ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E_x^i H_\xi - E_x H_\xi^i)\,dx; \tag{4}$$

$$\int\limits_{(\bar{5}'-\bar{5})} (E_x H_\xi^i - E_x^i H_\xi)\,dx = \int\limits_{(3-\bar{2}-3')} E_s^i H_\xi ds - \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E_x^i H_\xi - E_x H_\xi^i)\,dx.$$

Подставляя в левые части выражения для полей из (1), получаем

$$0 = \int\limits_{(3'-\bar{2}-3)} E_s^1 H_\xi ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E_x^1 H_\xi - E_x H_\xi^1)\,dx;$$

$$\frac{2\beta_1 p}{\sqrt{\varepsilon_1}}(R_1 - R) = \int\limits_{(3-\bar{2}-3')} E_s^1 H\,ds - \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E_x^1 H_\xi - E_x H_\xi^1)\,dx;$$

$$-\frac{2\beta_2 p}{\sqrt{\varepsilon_2}}T = \int\limits_{(3'-\bar{2}-3)} E_s^2 H_\xi ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E_x^2 H_\xi - E_x H_\xi^2)\,dx; \tag{5}$$

$$\frac{2\beta_1 p}{\sqrt{\varepsilon_1}}T_1 = \int\limits_{(3-\bar{2}-3')} E_s^2 H_\xi ds - \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E_x^2 H_\xi - E_x H_\xi^2)\,dx.$$

Таким образом, коэффициенты R и T (т. е. поля в дальней зоне) выражены через поля на контуре провода c:

$$\frac{2\beta_1 p}{\sqrt{\varepsilon_1}}(R_1 - R) = \oint\limits_c E_s^1 H_\xi ds; \tag{6}$$

$$\frac{2\beta_2 p}{\sqrt{\varepsilon_2}}(T_1 - T) = \oint\limits_c E_s^2 H_\xi ds.$$

3. ПОЛЯ ВБЛИЗИ ПРОВОДОВ

Найдем выражения для полей вблизи проводов. Замена волнового уравнения уравнением Лапласа приводит в нашем случае к ошибке порядка $(kp)^2$. Поэтому, если найдено решение уравнения $\nabla^2 H = 0$ с точностью до членов порядка $(kp)^2$, то можно считать, что это решение представляет собой с той же точностью истинное поле. Подчеркнем

к следует из (5), что это решение будет использовано лишь на кон-
ре провода и на линии между проводами. Итак, будем искать ква-
статическое решение, удовлетворяющее требованиям:

1) величины H_ξ и $\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial H_\xi}{\partial y}$ непрерывны на $4'-3'$ и на $3-4$;

2) $\partial H_\xi / \partial n = 0$ на контуре поперечного сечения провода (n — внеш-
я нормаль к контуру).

Первое требование следует из непрерывности тангенциальных со-
авляющих, второе — из равенства нулю касательной составляющей
ектрического поля на металле E_s. Для определения вида решения
уществим конформные преобразования $z_1(z)$ и $z_2(z)$, переводящие
ласти D_1 и D_2 плоскостей ком-
лексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1$
$z_2 = x_2 + iy_2$ в область D ком-
лексной переменной $z = x + iy$.
ответствие точек указано на
с. 2. Решение задачи во всей
ссматриваемой области ищем в
де

$$H_{\xi 2} = (A_2 + B_2 y_1)(1 + C_2 x_2) \text{ для } y \geqslant 0,$$
$$H_{\xi 1} = (A_1 + B_1 y_1)(1 + C_1 x_2) \text{ для } y \leqslant 0. \qquad (7)$$

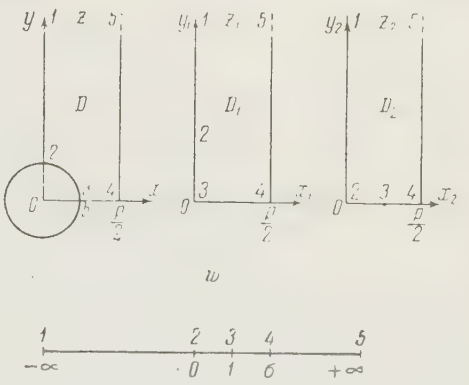


Рис. 2

есь $y_1(x, y)$ и $x_2(x, y)$ — мнимая и реальная части преобразований
(z) и $z_2(z)$; A_i, B_i, C_i — постоянные величины.

Определим функции x_2 и y_1 за границами области D из условий

$$\begin{aligned} y_1(-x, y) &= y_1(x, y); \\ y_1(x, -y) &= -y_1(x, y); \\ x_2(-x, y) &= -x_2(x, y); \\ x_2(x, -y) &= x_2(x, y). \end{aligned} \qquad (8)$$

Свяжем постоянные величины.

1) На участке $3-4$ $H_{\xi 2} = H_{\xi 1}$, $y_1 = 0$. Это дает $A_1 - A_2 = (C_2 A_2 - A_1 C_1) x_2$, и так как $x_2 \neq \text{const}$, то это равенство возможно лишь при $= A_2$, $C_1 = C_2$ (обозначим $C_1 = C$, $A_1 = A$).

2) Составляющая электрического поля E_x находится по формуле
$_{xi} = \frac{-1}{ik\varepsilon_i}\frac{\partial H_{\xi i}}{\partial y}$, и поскольку на $3-4$ $\partial x_2 / \partial y = 0$, то условие $E_{x2} = E_{x1}$
иводит к соотношению $B_1 = B_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ (обозначим $B_1 = B$).

3) Из условий $H_{\xi i}(p/2) = H_{\xi i}(-p/2) e^{-\gamma}$ и $x_2(-x, y) = -x_2(x, y)$
гко находим $C = -ik\sqrt{\varepsilon_1}\alpha_1$. Таким образом, поле вблизи проводов
жно представить через две постоянные A и B в виде

$$H_{\xi 2} = \left(A + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} B y_1\right)(1 - ik\sqrt{\varepsilon_2}\alpha_2 x_2) \text{ для } y \geqslant 0,$$
$$H_{\xi 1} = (A + B y_1)(1 - ik\sqrt{\varepsilon_1}\alpha_1 x_2) \text{ для } y \leqslant 0. \qquad (9)$$

Величины A и B определяются из основных уравнений (5). Далее показано, что величина B имеет порядок kp, поэтому $\nabla^2 H_z$ порядка $(kp)^2$, т. е. найденное решение с принятой точностью представляет истинное поле.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть контур поперечного сечения провода задан уравнением $y = -y(x)$. При вычислении интегралов по контуру провода (6) экспоненты заменяем двумя первыми членами разложения по ky (вертикальные размеры провода полагаем малыми по сравнению с длиной волны). Опуская длинные промежуточные вычисления, запишем выражения для R и T через постоянные A и B:

$$\frac{2\beta_2}{T_2}(R_1 - R) = -ikp\sqrt{\varepsilon_2}\left[2l + \alpha_2^2\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)L\right]A + \left[\beta_2\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\Delta_1 + ikp\sqrt{\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\Delta_2\right]Bp;$$

$$\frac{2\beta_1}{T_1}(T_1 - T) = -ikp\sqrt{\varepsilon_1}\left[2l + \alpha_1^2\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)L\right]A + \left[\beta_1\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\Delta_1 - ikp\sqrt{\varepsilon_2}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\Delta_2\right]Bp; \tag{10}$$

$$l = \frac{S}{2p^2};\quad L = \frac{2}{p^2}\int_0^b x_2 y'dx;\quad \Delta_1 = \frac{2}{p^2}\int_0^b y_1 dx;\quad \Delta_2 = \frac{2}{p^3}\int_0^b yy_1 dx.$$

Подынтегральные функции берутся в точках контура; y' — производная функции $y(x)$; S — площадь сечения провода; $2b$ — максимальный размер провода в направлении оси ox. Величины A и B находятся из первого и четвертого уравнений (5). При вычислении интегралов по участкам $4'-3'$; $3-4$ необходимо знать величину $\int_b^{p/2}\frac{\partial y_1}{\partial y}dx$. Значение этого интеграла легко найти, записав условие равенства нулю интеграла по замкнутому контуру Γ_1 от функции $\partial y_1/\partial n$; оно оказывается равным p. В результате вычислений находим постоянные A и B:

$$A = \frac{2\beta_1}{G_{22}}\frac{1}{\frac{G_{11}}{G_{22}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{D_{11}}{D_{22}}};\qquad B = -\frac{2\beta_1}{D_{11}}\frac{ik\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{G_{11}}{G_{22}} + \frac{D_{11}}{D_{22}}}. \tag{11}$$

Подставляя A и B в (10), получаем окончательные выражения для R и T:

$$R = \frac{\frac{G_{12}}{G_{22}} - \frac{D_{12}}{D_{22}}}{\frac{G_{11}}{G_{22}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{D_{11}}{D_{22}}}T_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} + R_1;\qquad T = \frac{\frac{G_{21}}{G_{22}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{D_{21}}{D_{22}}}{\frac{G_{11}}{G_{22}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{D_{11}}{D_{22}}}T_1. \tag{12}$$

Здесь

$$G_{jn} = \beta_n - (-1)^{j+n}ikp\sqrt{\varepsilon_n}(l + \alpha_j^2 L);$$

$$D_{jn} = 1 + (-1)^{j+n}ikp\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{\varepsilon_n}}\beta_n\Delta_1 + (kp)^2\varepsilon_j(\beta_j^2\Delta_2 - \alpha_j^2\Delta_3);$$

$$\Delta_3 = \frac{2}{p^3}\int_0^b (x - x_2)\, y_1 y' dx.$$

5. ПРОВЕРКА ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ

При $q = 2b/p \to 0$ $(b \to 0)$ коэффициенты R и T переходят в R_1 и . Этот же предельный переход имеет место при $kp \to 0$. Иными сло-ми, уменьшение периода ведет к возрастанию просачивания поля возь решетку.

Выясним поведение R и T при $q \to 1$ (переход к сплошному запол-нию, т. е. к гофре). Для этого проще сразу воспользоваться другим реобразованием, а именно: осуществим конформное преобразование рхней полуплоскости вспомогательной комплексной плоскости w (рис. 2) область D_1 плоскости z_1 так, чтобы точки $-\infty$, 0, 1, σ, $+\infty$ действи-льной оси w переходили соответственно в точки *1*, *2*, *3*, *4*, *5* плоскос-z_1. Преобразование запишем в виде

$$z_1 = \frac{p}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{w-1}{\sigma-1}}. \tag{13}$$

раметр σ зависит от формы и относительных размеров провода. Для числения Δ_i нужно знать значения y_1 на участке *2—3*. На этом астке $0 \leqslant \omega \leqslant 1$, поэтому

$$y_1 = \operatorname{Im} z_1 = \frac{p}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1-w} + \sqrt{\sigma-w}}{\sqrt{\sigma-1}}. \tag{14}$$

ри $q \to 1$ (провода неограниченно сближаются, $b \to p/2$) $\sigma \to 1$, $y_1 \to \infty$ апомним, что требование $ky_1 \ll 1$ не предъявлялось, было только $\ll 1$). При этом из интегралов, определяющих Δ_i, выделяются глав-ые члены, стремящиеся к бесконечности (можно показать, что особен-сть выражения $\ln(\sqrt{1-w} + \sqrt{\sigma-w})$ в точке $w = 1$ при $\sigma \to 1$ тегрируема):

$$\Delta_1 \to \frac{y_1}{p}; \quad \Delta_2 \to \frac{y_1}{p} l; \quad \Delta_3 \to -\frac{y_1}{p}(l+L); \quad \beta_i^2\Delta_2 - \alpha_i^2\Delta_3 \to \frac{y_1}{p}(l + \alpha_i^2 L). \tag{15}$$

одставляя эти выражения в (12), находим для $q = 1$

$$T = 0; \qquad R = \frac{\beta_1 + ikp\sqrt{\varepsilon_1}(l + \alpha_1^2 L)}{\beta_1 - ikp\sqrt{\varepsilon_1}(l + \alpha_1^2 L)}; \quad |R| = 1, \tag{16}$$

о и следовало ожидать. При нормальном падении $\varphi_1 = 0$ $(\beta_1 = 1;$ $= 0)$ формулу (16) для R в нашем приближении можно записать виде

$$R = e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\frac{S}{p}}. \tag{17}$$

ля прямоугольного провода эта формула, как и должно быть, дает бег фазы при простом сдвиге в отрицательном направлении у идеаль-проводящей плоскости. Таким образом, при нормальном падении оской волны на плоскую гофрированную поверхность с гофрой про-вольной формы набег фазы в коэффициенте отражения пропорциона-н площади сечения фигуры, образующей гофру.

6. ПРОВОДА КРУГЛОГО И ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Для решетки из круглых проводов можно использовать для расче-в весьма точное преобразование Блоха [2]

$$z_1 = z - \frac{mb}{2\pi} \ln \frac{\sin\frac{\pi}{p}(z + \lambda b)}{\sin\frac{\pi}{p}(z - \lambda b)}. \tag{18}$$

десь b — радиус провода; m и λ — параметры, зависящие от q. При

тонком проводе ($q \ll 1$), нормальном падении ($\varphi_1 = 0$) и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ использование этого преобразования приводит к формулам

$$R = 3ikl, \quad T = 1 - ikl, \tag{19}$$

совпадающим с формулами, полученными в [3]. Результаты Ламба [4] и Ганса [5] для этого случая в задаче с тождественной постановкой ошибочны. В их формулах не учтен кольцевой ток по периметру сечения провода, что привело к ошибке для коэффициента отражения в полтора раза. По формулам (12) при помощи преобразования (18) был произведен численный расчет R и T для значений параметров $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 3$; $\varphi_1 = 84°$*; $kp = 0{,}1$; $0{,}2$. Результаты расчета в функции от q представлены на рис. 3.

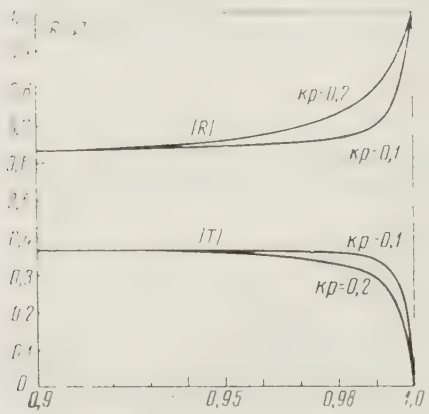


Рис. 3

Для прямоугольных проводов конформные преобразования $z(w)$ и $z_1(w)$ имеют вид

$$z = \frac{p}{2\pi}\int_0^w \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\sqrt{\frac{u-t}{u-\sigma}}\,du + \\ + ic;\ z_1 = \frac{p}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{w-1}{\sigma-1}} \\ = \frac{p}{2\pi}\int_{w-1}^{} \frac{du}{\sqrt{u(\sigma-1-u)}}. \tag{20}$$

Здесь $2c$ — размер провода в направлении оси y. Параметры σ и t, зависящие от относительных размеров провода, находятся из уравнений (5), (6) работы [6]. Для некоторых значений относительных размеров провода в этой работе проделаны вычисления σ и t. Безразмерные параметры l, L, Δ_i вычисляются по формулам

$$l = \frac{2bc}{p^2};\ L = -\frac{2}{p^2}\int_0^c x_2(b,\ y)\,dy;\ \Delta_1 = \frac{2}{p^2}\int_0^b y_1(x,\ c)\,dx;\ \Delta_2 = \Delta_1\frac{c}{p};$$

$$\Delta_3 = \frac{2}{p^3}\int_0^c [x_2(b,\ y) - b]\,y_1(b,\ y)\,dy. \tag{21}$$

7. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Полученные коэффициенты отражения и прохождения позволяют записать локальные граничные условия, эквивалентные действию решетки. Действительно, после вычисления R и T по формулам (1) мы знаем истинные поля для областей, лежащих выше прямой $5' - 5$ и ниже прямой $\overline{5'} - \overline{5}$ (напомним, что эти участки находятся в плоскости $y = 0$ на расстояниях, достаточных для формирования полей плоских волн. Обычно эти расстояния порядка периода, т. к. поля местных волн быстро затухают при удалении от решетки). Если продолжить поля до $y = 0$, как поля плоских волн (имея в виду, что это продолжение не представляет истинного поля), то мы тем самым введем при $y = 0$ некую полупрозрачную бесконечно тонкую

* Этот угол равен углу Бриллюэна в разложении волноводной волны E_{01} в круглом волноводе на плоские волны, $ka = 23{,}13$ (a — радиус волновода).

ленку, на которой определены скачки составляющих поля:

$$H_{\xi 2} - H_{\xi 1} = (T - R - 1)\, e^{-\gamma};$$
$$E_{x2} - E_{x1} = \left[\frac{\beta_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} T + \frac{\beta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (R - 1)\right] e^{-\gamma}; \qquad (22а)$$
$$E_{y2} - E_{y1} = \left[\frac{\alpha_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (1 + R) - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} T\right] e^{-\gamma}.$$

Соответственно

$$H_{\xi 2} + H_{\xi 1} = (T + R + 1)\, e^{-\gamma};$$
$$E_{x2} + E_{x1} = \left[\frac{\beta_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} T + \frac{\beta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (1 - R)\right] e^{-\gamma}; \qquad (22б)$$
$$E_{y2} + E_{y1} = -\left[\frac{\alpha_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} T + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (1 + R)\right] e^{-\gamma}.$$

Очевидно, что действие этой гипотетической пленки эквивалентно действию реальной решетки, поскольку сохраняются поля в дальних зонах. Скачки составляющих поля (22) можно при этом рассматривать как эквивалентные граничные условия, которые нужно ставить при $y = 0$. Эти граничные условия можно использовать для расчета затухания и фазовых характеристик волн типа E_{0n} в спиральном волноводе. Для частного случая решетки из лент ($c = 0$) и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ эти граничные условия совпадают с соответствующими граничными условиями, полученными в [7].

8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ОТ СИСТЕМЫ РЕШЕТКА — ЭКРАН. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим систему (рис. 4), образованную решеткой и идеально проводящей металлической плоскостью, расположенной на расстоянии r от решетки (r достаточно для формирования плоских полей). Пространство между решеткой и сплошным экраном заполнено диэлектриком с проницаемостью ε_2; под решеткой ($y < 0$) диэлектрическое заполнение имеет проницаемость ε_1. Вычислим коэффициент отражения от этой системы $R_{эф}$.

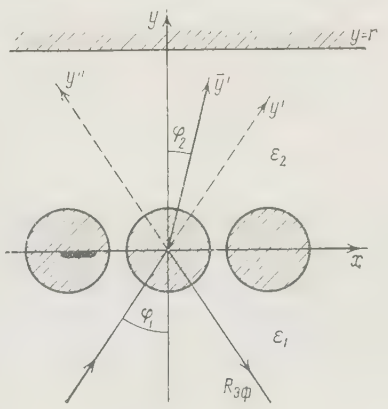


Рис. 4

Заменим решетку эквивалентной пленкой; тогда поле в области $y \leqslant 0$ можно представить в виде

$$H_{\xi 1} = e^{-ik\sqrt{\varepsilon_2}\, y'} + Re^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\, y''} + \sum_{n=1}^{\infty} H_{\xi 1}^{(n)}, \qquad (23)$$

где сумма в правой части есть поле, возникшее в результате многократных отражений, имеющих место в области между пленкой и экраном. Вычисляя эту сумму, например в точке $x = 0$, $y = 0$, находим выражение для эффективного коэффициента отражения

$$R_{эф} = R + \frac{TT^*}{e^{ik\sqrt{\varepsilon_2}\beta_2 2r} - R^*}. \qquad (24)$$

Здесь R^* и T^* — коэффициенты отражения и прохождения при падении волны из среды (2) в среду (1). Они получаются из формул для R и T (12) заменой индексов (1 на 2 и 2 на 1). Найденный коэффициент отражения позволяет записать граничное условие, эквивалентное действию системы ре-

шетка — сплошной экран, которое нужно ставить при $y = 0$:

$$E_{x1} = \eta H_{z1}, \quad \eta = \frac{1 - R_{эф}}{1 + R_{эф}} \frac{\beta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}. \tag{25}$$

Граничное условие можно применить для расчета фазовых скоростей волн E_{0n} в спиральном волноводе с цельнометаллической оболочкой. Подставляя в (25) выражение для составляющих полей, получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{xJ_0(x)}{J_1(x)} = -i\eta ka. \tag{26}$$

В заключение автор благодарит Б. З. Каценеленбаума за большое внимание, проявленное им к изложенной работе, и весьма ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Заксон, О модификации одного метода расчета возбуждения волноводов, Докл. АН СССР, 1949, 66, 4, 637.
2. Э. Блох, Исследование плоской решетки, составленной из теоретических профилей конечной толщины, Тр. ЦАГИ, 1947, № 611.
3. Б. Э. Каценеленбаум, Определение коэффициента отражения электромагнитной волны в прямоугольном волноводе от тонкого металлического стержня, перпендикулярного электрическому полю, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1960, 5.
4. Г. Ламб, Гидродинамика, ГИТТЛ, 1947, стр. 673.
5. R. Gans, Das Verhalten Hertzseher Gitter, Ann. Physik, 1920, 61, 5, 447.
6. В. В. Малин, А. Н. Сивов, К теории распространения волны H_{01} в спиральном волноводе, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 433.
7. Н. Н. Смирнов, Распространение электромагнитных волн в круглых волноводах с периодическими щелями, ЖТФ, 1958, 28, 7, 1494.

Поступила в редакцию
10 V 1960

1961 № 1

РАВНОМЕРНЫЙ ИЗГИБ *П*- И *Т*-ВОЛНОВОДОВ В ПЛОСКОСТИ *Е*

А. Я. Яшкин

Приведен вывод систем уравнений, связывающих критическую волну с размерами поперечного сечения *П*-, *Т*-волноводов, равномерно изогнутых в плоскости *Е**. Применение полученных систем к конкретному расчету проиллюстрировано примером расчета критической волны изогнутого *П*-волновода.

ВВЕДЕНИЕ

Поперечные волны *TE*, обычно используемые в прямых *П*-, *Т*-волноводах, имеют, как известно, две составляющие электрического поля, находящиеся в плоскости поперечного сечения, причем одна из них (основная) определяет поляризацию волны (обычно применяют поляризацию, показанную на рис. 1 вектором *E*).

При изучении изогнутых волноводов будем рассматривать волну такого типа, которая также имеет в плоскости поперечного сечения обе составляющие электрического поля. Этому условию в изогнутых волноводах отвечают волны типа *E* [2]. Другая возможная волна (типа *H*) не имеет E_z-составляющей и при выпрямлении волновода вырождается не в поперечную, как следовало ожидать, а в продольную [3] волну, которая в прямых *П*-, *Т*-волноводах обычно не используется.

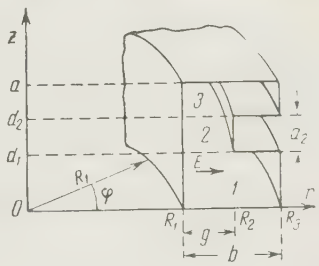


Рис. 1

Так как в изогнутых волноводах, если пользоваться цилиндрической системой координат z, r, φ, распространение волны происходит по координатному направлению φ, то в критическом случае (а нас интересует только этот случай) распространение по этому направлению отсутствует и, следовательно, в исходных уравнениях выпадают члены, содержащие производные по φ. В дальнейшем будем предполагать, что волновод имеет абсолютно проводящие стенки и заполнен воздухом ($\varepsilon = \mu = 1$). Опуская член, определяющий гармоническую зависимость поля от времени, запишем составляющие поля через электрическую потенциальную функцию $\Pi_E = \Pi$:

$$\Pi = \Pi_z \Pi_r = [A' \cos sz + B' \sin sz]\,\Pi_r = A \cos s\,(z - \alpha)\,\Pi_r; \qquad (1)$$

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial r}; \quad H_\varphi = -jk \frac{\partial \Pi}{\partial r}; \quad E_z = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right]\Pi; \; E_\varphi = H_r = H_z = 0, \qquad (2)$$

которая удовлетворяет, в свою очередь, волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r}\right)\right] + k^2 \Pi = 0, \qquad (3)$$

где $k = 2\pi / \lambda$ — постоянная распространения волны в открытом пространстве (λ — длина волны).

* Изгиб волноводов в плоскости *H* рассмотрен в работе [1].

Функция Π_r является решением уравнения Бесселя

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Pi_r}{\partial r}\right)+\varkappa^2\Pi_r=0, \tag{4}$$

причем

$$\varkappa^2=k^2-s^2, \tag{5}$$

где s^2 — постоянная разделения.

Решение уравнения (4) при $\varkappa$, отличном от нуля, выражается в общем случае линейной комбинацией функций Бесселя и Неймана нулевого порядка:

$$\Pi_r=A_1Z_0(\varkappa r)=A_2J_0(\varkappa r)+A_3N_0(\varkappa r). \tag{6}$$

Известно [4], что волна типа E в изогнутом волноводе простой прямоугольной формы или волны TM в коаксиальном волноводе (критический случай в изогнутом волноводе соответствует установившимся колебаниям в короткозамкнутом отрезке коаксиальной линии) могут вырождаться в волну TEM, составляющие которой связаны с потенциальной функцией Π, являющейся решением уравнения Лапласа, получаемого из (4) при $\varkappa=0$. Решение упомянутого уравнения Лапласа имеет вид [4]

$$\Pi=B_1\ln r+B_2. \tag{7}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться решениями уравнения (4) для различных $\varkappa$, включая и $\varkappa=0$.

1. Π-ВОЛНОВОД

Разобьем сечение изогнутого Π-волновода (рис. 1) на три простые прямоугольные области *1*, *2*, *3* и запишем для каждой области общее решение волнового уравнения (3) в виде бесконечной суммы частных решений, соответствующих различным значениям $\varkappa$, но отвечающим одному значению k (согласно (5) при $\varkappa=0$ $s=k$):

$$\Pi_i=\sum_{m=0}^{\infty}\Pi_{im}=A_{i0}\cos k(z-\alpha_i)\ (\ln r+B_2)+\sum_{m=1}^{\infty}A_{im}\cos s_{im}(z-\alpha_i)Z_0(\varkappa_{im}r), \tag{8}$$

где $i=1,\ 2,\ 3$ — номер области.

Из граничных условий на стенках волновода

$$(\Pi_{im})_{r=R_i}=0;\quad \left(\frac{\partial \Pi_{im}}{\partial z}\right)_{z=0,\,a}=0 \tag{9}$$

нетрудно получить: $\alpha_1=0$; $\alpha_3=a$ (α_2 — неизвестный параметр, определяемый из условий непрерывности); $\varkappa_{1m}=\varkappa_{3m}$ — m-е корни уравнения

$$J_0(\varkappa R_1)N_0(\varkappa R_3)-N_0(\varkappa R_1)J_0(\varkappa R_3)=0; \tag{10}$$

$\varkappa_{2m}$ — корни уравнения

$$J_0(\varkappa R_1)N_0(\varkappa R_2)-N_0(\varkappa R_1)J_0(\varkappa R_2)=0. \tag{10'}$$

Поскольку $\varkappa_{im}$ определяются из граничных условий, постоянную s_{im} можно рассчитать, если задать значение собственного числа k:

$$s_{im}=\sqrt{k^2-\varkappa_{im}^2}. \tag{11}$$

Задача состоит в том, чтобы определить собственное число k уравнения (3) с граничными условиями для Π на сложном контуре поперечного сечения волновода. Для этого мы «сошьем» решения на линиях раздела простых областей.

Условия непрерывности составляющих поля (2) на линии $z = d_1$

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial z\, \partial r} = \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z \partial r} \sim E_r; \qquad \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial r} \tag{12}$$

приводят к двум уравнениям

$$A_{10} \frac{k \sin k d_1}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} \varkappa_{1m} s_{1m} \sin (s_{1m} d_1)\, Z_1 (\varkappa_{1m} r) =$$

$$= A_{20} \frac{k \sin k (d_1 - \alpha_2)}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} \varkappa_{2m} s_{2m} \sin s_{2m} (d_1 - \alpha_2)\, Z_1 (\varkappa_{2m} r) = \frac{\Psi(r)}{r}, \tag{13}$$

$$A_{10} \frac{\cos k d_1}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} \varkappa_{1m} \cos (s_{1m} d_1)\, Z_1 (\varkappa_{1m} r) =$$

$$= A_{20} \frac{\cos k (d_1 - \alpha_2)}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} \varkappa_{2m} \cos s_{2m} (d_1 - \alpha_2)\, Z_1 (\varkappa_{2m} r). \tag{14}$$

Рассматривая (13) как разложение функции $\Psi(r)/r$ в ряд Фурье — Бесселя по $Z_1(\varkappa_{1m} r)$ в интервале $(R_1 R_3)$ и по $Z_1(\varkappa_{2m} r)$ в интервале $(R_1 R_2)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ и учитывая, что подынтегральная функция $\Psi(r)$ обращается в нуль на проводящем отрезке $(R_3 - R_2)$, выразим коэффициенты A_{1m}, A_{2m} через неизвестную пока функцию $\Psi(r)$:

$$A_{10} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi(\xi)}{\xi} d\xi}{k \sin k d_1 \ln \frac{R_3}{R_1}}; \quad A_{1m} = -\frac{2 \int_{R_1}^{R_2} \Psi(\xi)\, Z_1 (\varkappa_{1m} \xi)\, d\xi}{s_{1m} \varkappa_{1m} \sin (s_{1m} d_1) \left[R_3^2 Z_1^2 (\varkappa_{1m} R_3) - R_1^2 Z_1^2 (\varkappa_{1m} R_1)\right]}; \tag{15}$$

$$A_{20} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi(\xi)}{\xi} d\xi}{k \sin k (d_1 - \alpha_2) \ln \frac{R_2}{R_1}};$$

$$A_{2m} = -\frac{2 \int_{R_1}^{R_2} \Psi(\xi)\, Z_1 (\varkappa_{2m} \xi)\, d\xi}{s_{2m} \varkappa_{2m} \sin s_{2m} (d_1 - \alpha_2) \left[R_2^2 Z_1 (\varkappa_{2m} R_2) - R_1^2 Z_1^2 (\varkappa_{2m} R_1)\right]}. \tag{16}$$

Подставляя найденные коэффициенты в уравнение (14) и перенося все в левую часть равенства, придем к интегральному уравнению относительно $\Psi(\xi)$:

$$\int_{R_1}^{R_2} \Psi(\xi)\, P(r, \xi)\, d\xi = 0, \tag{17}$$

в котором симметричное ядро представлено выражением

$$P(r, \xi) = \frac{\operatorname{ctg} k d_1}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \frac{1}{r} \frac{1}{\xi} - \frac{\operatorname{ctg} k (d_1 - \alpha_2)}{k \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r} \frac{1}{\xi} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{ctg} s_{1m} d_1}{s_{1m} \left[R_3^2 Z_1^2 (\varkappa_{1m} R_3) - R_1^2 Z_1^2 (\varkappa_{1m} R_1)\right]} Z_1 (\varkappa_{1m} r)\, Z_1 (\varkappa_{1m} \xi) -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{ctg} s_{2m} (d_1 - \alpha_2)}{s_{2m} \left[R_2^2 Z_1^2 (\varkappa_{2m} R_2) - R_1^2 Z_1^2 (\varkappa_{2m} R_1)\right]} Z_1 (\varkappa_{2m} r)\, Z_1 (\varkappa_{2m} \xi). \tag{18}$$

Решение интегрального уравнения (17) осуществим методом Бубнова — Галеркина. Аппроксимируя неизвестную функцию $\Psi(\xi)$ в первом приближении некоторой постоянной, получим соотношение

$$\int_{R_1}^{R_2}\int_{R_1}^{R_2} P(r, \xi)\, dr\, d\xi = 0, \tag{19}$$

которое связывает собственное число (и, следовательно, критическую волну), а также неизвестный параметр α_2 с размерами двух соседних прямоугольных областей. После вычисления выражение (19) принимает следующий вид:

$$\operatorname{ctg} k(d_1 - \alpha_2) = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{\ln\frac{R_3}{R_1}}\left\{\operatorname{ctg} kd_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln\frac{R_3}{R_1}}{\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} s_{1m} d_1 Z_0^2(\varkappa_{1m} R_2)}{s_{1m}\varkappa_{1m}^2 [R_3^2 Z_1^2(\varkappa_{1m} R_3) - R_1^2 Z_1^2(\varkappa_{1m} R_1)]}\right\}. \tag{20}$$

Запишем уравнение (20) в несколько ином виде. Выразим Z_0, Z_1 через функции [5] малого радиального синуса (sn) и косинуса (cs) по следующим соотношениям:

$$Z_0(\varkappa_{1m} R_j) = \frac{J_0(\varkappa_{1m} R_j) N_0(\varkappa_{1m} R_1) - N_0(\varkappa_{1m} R_j) J_0(\varkappa_{1m} R_1)}{N_0(\varkappa_{1m} R_1)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sn}(\varkappa_{1m} R_j, \varkappa_{1m} R_1)}{N_0(\varkappa_{1m} R_1)}, \tag{21}$$

$$Z_1(\varkappa_{1m} R_j) = \frac{J_1(\varkappa_{1m} R_j) N_0(\varkappa_{1m} R_1) - N_1(\varkappa_{1m} R_j) J_0(\varkappa_{1m} R_1)}{N_0(\varkappa_{1m} R_1)} =$$

$$= \frac{\operatorname{cs}(\varkappa_{1m} R_j, \varkappa_{1m} R_1)}{N_0(\varkappa_{1m} R_1)}. \tag{22}$$

Если учесть, что радиальный косинус от одинаковых независимых переменных имеет простое выражение [6]

$$\operatorname{cs}(\varkappa_{1m} R_1, \varkappa_{1m} R_1) = -\frac{2}{\pi\varkappa_{1m} R_1},$$

то уравнение (20) запишется в следующем окончательном виде:

$$\operatorname{ctg} k(d_1 - \alpha_2) = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{\ln\frac{R_3}{R_1}}\left\{\operatorname{ctg} kd_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln\frac{R_3}{R_1}}{\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} s_{1m} d_1 \operatorname{sn}^2(\varkappa_{1m} R_2, \varkappa_{1m} R_1)}{s_{1m}\varkappa_{1m}^2 \left[R_3^2 \operatorname{cs}^2(\varkappa_{1m} R_3, \varkappa_{1m} R_1) - \frac{4}{\pi^2\varkappa_{1m}^2}\right]}\right\}. \tag{23}$$

Нетрудно показать, что при больших R_j, R_1 радиальные синусы и косинусы можно заменить асимптотическими выражениями

$$\operatorname{sn}(\varkappa_{1m} R_j, \varkappa_{1m} R_1) \simeq \frac{2}{\pi\varkappa_{1m}\sqrt{R_j R_1}} \sin[\varkappa_{1m}(R_j - R_1)],$$

$$\operatorname{cs}(\varkappa_{1m} R_j, \varkappa_{1m} R_1) = \frac{2}{\pi\varkappa_{1m}\sqrt{R_j R_1}}, \tag{24}$$

число $\varkappa_{1m}$ — выражением

$$\varkappa_{1m} = \frac{m\pi}{R_3 - R_1}. \tag{25}$$

Учитывая (24), (25), вводя обозначения $R_3 - R_1 = b$; $R_2 - R_1 = g$, спользуя далее предельные переходы $\ln\frac{R_2}{R_1} \Big/ \ln\frac{R_3}{R_1} \to \frac{g}{b}$; $R_2 \ln\frac{R_2}{R_1} \to g$, $\left(\frac{R_j}{R_1} \to 1\right)$, легко получить из уравнения (23) его предельное выражение, соответствующее выпрямленному волноводу:

$$\operatorname{ctg} k(d_1 - \alpha_2) =$$

$$= \frac{g}{b}\left\{\operatorname{ctg} kd_1 + 2k\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} s_{1m} d_1}{s_{1m}} \frac{\sin^2\left(\frac{m\pi}{b} g\right)}{\left(\frac{m\pi}{b} g\right)^2}\right\}. \tag{26}$$

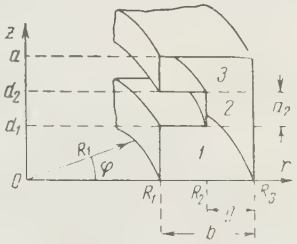


Рис. 2

Уравнение (26) оказалось тождественным соответствующему уравнению, полученному [7] при непосредственном решении прямого несимметричного *П*-волновода, что подтверждает правильность наших рассуждений, приведших выражению (23). Уравнение (23) содержит две неизвестных величины и α_2; для их определения необходимо второе уравнение, которое получается из условий непрерывности решений на линии $z = d_2$:

$$\operatorname{ctg} k(d_2 - \alpha_2) = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{\ln\frac{R_3}{R_1}}\left\{\operatorname{ctg} k(d_2 - a) + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln\frac{R_3}{R_1}}{\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} s_{1m}(d_2 - a)\,\mathrm{sn}^2(\varkappa_{1m} R_2, \varkappa_{1m} R_1)}{s_{1m}\varkappa_{1m}^2\left[R_3^2\,\mathrm{cs}^2(\varkappa_{1m} R_3, \varkappa_{1m} R_1) - \frac{4}{\pi^2\varkappa_{1m}^2}\right]}\right\}. \tag{27}$$

Итак, уравнения (23), (27) образуют характеристическую систему для *П*-волновода, изогнутого в плоскости *E*, причем изгиб осуществлен со гладкой стороне (рис. 1). Если изгиб осуществлен по стороне с выступом (рис. 2), характеристическая система имеет другой вид:

$$\operatorname{ctg} k(d_1 - \alpha_2) = \frac{\ln\frac{R_3}{R_2}}{\ln\frac{R_3}{R_1}}\left\{\operatorname{ctg} kd_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln\frac{R_3}{R_1}}{\ln^2\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} s_{1m} d_1\,\mathrm{sn}^2(\varkappa_{1m} R_2, \varkappa_{1m} R_3)}{s_{1m}\varkappa_{1m}^2\left[\frac{4}{\pi^2\varkappa_{1m}^2} - R_1^2\,\mathrm{cs}^2(\varkappa_{1m} R_1, \varkappa_{1m} R_3)\right]}\right\}, \tag{28}$$

$$\operatorname{ctg} k(d_2 - \alpha_2) = \frac{\ln\frac{R_3}{R_2}}{\ln\frac{R_3}{R_1}}\left\{\operatorname{ctg} k(d_2 - a) + \right.$$

$$\left. - \frac{\ln\frac{R_3}{R_1}}{\ln^2\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} s_{1m}(d_2 - a)\,\mathrm{sn}^2(\varkappa_{1m} R_2, \varkappa_{1m} R_3)}{s_{1m}\varkappa_{1m}^2\left[\frac{4}{\pi^2\varkappa_{1m}^2} - R_1^2\,\mathrm{cs}^2(\varkappa_{1m} R_1, \varkappa_{1m} R_3)\right]}\right\}. \tag{29}$$

Система уравнений (28), (29) не тождественна системе (23), (27), поэтому и результаты изгиба $П$-волновода в ту и другую сторону в плоскости E не будут одинаковыми. Очевидно, что по мере выпрямления волновода указанное различие постепенно исчезает.

T-ВОЛНОВОД

Характеристическая система уравнений для изогнутого T-волновода получается путем сшивания решений, записанных для каждой из трех областей (рис. 3), на линиях $z = d_1, d_2$. Опуская ход рассуждений (он полностью повторяет рассмотренный выше), выпишем получающиеся в первом приближении конечные выражения

$$\operatorname{ctg} kd_1 = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \left\{ \operatorname{ctg} k(d_1 - \alpha_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln \frac{R_3}{R_1}}{\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} s_{2m}(d_1 - \alpha_2)\, \mathrm{sn}^2(\varkappa_{2m} R_2, \varkappa_{2m} R_1)}{s_{2m}\varkappa_{2m}^2 \left[R_3^2 \mathrm{cs}^2(\varkappa_{2m} R_3, \varkappa_{2m} R_1) - \frac{4}{\pi^2 \varkappa_{2m}^2} \right]} \right\}, \tag{30}$$

$$\operatorname{ctg} k(d_2 - a) = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\ln \frac{R_3}{R_1}} \left\{ \operatorname{ctg} k(d_2 - \alpha_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln \frac{R_3}{R_1}}{\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} s_{2m}(d_2 - \alpha_2)\, \mathrm{sn}^2(\varkappa_{2m} R_2, \varkappa_{2m} R_1)}{s_{2m}\varkappa_{2m}^2 \left[R_3^2 \mathrm{cs}^2(\varkappa_{2m} R_3, \varkappa_{2m} R_1) - \frac{4}{\pi^2 \varkappa_{2m}^2} \right]} \right\}. \tag{31}$$

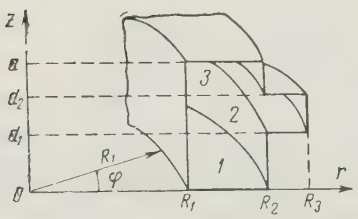


Рис. 3

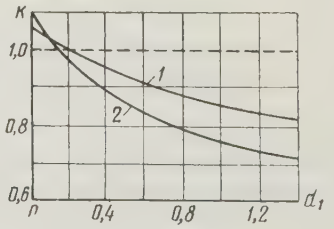


Рис. 4

Как и для $П$-волновода, оба возможных изгиба T-волновода в плоскости E не будут эквивалентными. Различия в результатах изгиба также исчезают при выпрямлении волновода, а система (30), (31) при $R_j/R_1 \to 1$ переходит в известную [7] систему для прямого несимметричного T-волновода.

3. НЕКОТОРЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ДАННЫЕ

Если для рассматриваемых волноводов разыскивается наименьшее k, то, согласно (11), его следует искать среди значений, меньших любого $\varkappa_{im}$, а это условие определяет

$$s_{im} = j\sqrt{\varkappa_{im}^2 - k^2} = j s'_{im} \tag{32}$$

как чисто мнимые величины для всех $m = 1, 2, \ldots$. Таким образом, характеристические системы для изучаемых волноводов в случае наимень-

:его k будут иметь под знаком сумм вместо обычных гиперболические отангенсы со знаком минус.

Ниже приводятся данные расчета наименьшего собственного числа k для зогнутого по гладкой стороне (рис. 1) несимметричного *П*-волновода. Рас-ет производился по системе (23), (27); под знаком суммы учитывался толь-о первый член (нетрудно показать, пользуясь асимптотическим поведением есселевых функций, что при возрастании m члены суммы убывают не мед-еннее, чем $1/m^2$). Значения корней $\varkappa_{1m}$ брались из таблиц [5].

На рис. 4 (кривая *1*) приведены результаты расчета k в функции d_1— асстояния выступа (рис. 1), имеющего фиксированные размеры ($a_2 = 0{,}34$; $b/g = 2$), от боковой стенки изогнутого *П*-волновода. Искривление арактеризуется величиной $R_3/R_1 = 4$. При расчете принималось: $a = \pi$, $/b = 2$. Кривая *2* на рис. 4 показывает ту же зависимость $k = f(d_1)$ для рямого *П*-волновода. Пунктиром на рис. 4 отмечено значение k для изог-утого ($R_3/R_1 = 4$) прямоугольного волновода без выступа ($g = b$). Это начение можно получить из системы (23), (27) как предельный случай, ког-а $R_2 \to R_3$.

Из приведенных данных видно, что изгиб *П*-волновода в плоскости *Е* риводит, за исключением малых d_1, к увеличению собственного числа и, ледовательно, уменьшению критической волны по отношению к волне пря-ого *П*-волновода. С другой стороны, создание выступа в уже изогнутом рямоугольном волноводе приводит к удлинению критической волны для сех не очень малых d_1. Для малых d_1 создание выступа в изогнутом прямо-гольном волноводе может привести, наоборот, к уменьшению критической олны.

ЛИТЕРАТУРА

. А. Я. Яшкин, *П*-, *Т*-волноводы, равномерно изогнутые в плоскости *Н*, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 11, 1831.
. Д. И. Воскресенский, Равномерно изогнутый волновод прямоугольного сечения, Вопросы радиотехники сверхвысоких частот, Оборонгиз, 1957.
. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, ГТИ, 1946.
. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, Изд. Советское радио, 1952.
. Справочник по волноводам, Изд. Советское радио, 1952.
. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.
. А. Я. Яшкин, Расчет критической волны низшего типа для несимметричных *П*-, *Т*- и некоторых волноводов другой формы, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 8, 989.

Поступила в редакцию
28 XII 1959

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЫХ СИСТЕМ С АНИЗОТРОПНЫМИ ОБЛАСТЯМИ МЕТОДОМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

П. Ш. Волноводов

В. В. Никольский

Подобно тому как в ч. I работы исследовался резонатор с анизотропной областью, ниже рассмотрен аналогичный волновод. Задача приведена к виду, допускающему применение методов машинной вычислительной техники.

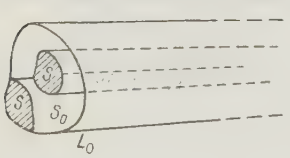
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волновод (см. рисунок) — идеально проводящую трубу (поперечное сечение S_0 с контуром L_0), содержащую анизотропный цилиндр поперечного сечения S. Требуется найти постоянные распространения, т. е. продольные (комплексные) волновые числа возможных волновых полей системы.

Среда (ср. [1]) характеризуется тензорами проницаемостей $\overleftrightarrow{\varepsilon}(\vec{r})$ и $\overleftrightarrow{\mu}(\vec{r})$, которые заданы как

$$\left.\begin{aligned}\overleftrightarrow{\varepsilon}\ (\vec{r}) &= \varepsilon_0 \overleftrightarrow{I}\\ \overleftrightarrow{\mu}\ (\vec{r}) &= \mu_0 \overleftrightarrow{I}\end{aligned}\right\} \text{ внутри } S - S_0, \qquad \left.\begin{aligned}\overleftrightarrow{\varepsilon}\ (\vec{r}) &= \overleftrightarrow{\varepsilon}\\ \overleftrightarrow{\mu}\ (\vec{r}) &= \overleftrightarrow{\mu}\end{aligned}\right\} \text{ внутри } S. \tag{1}$$

Предполагается, что для «пустого» волновода известна полная система собственных функций (см. [2], § 22) как совокупность продольных и поперечных составляющих возможных H- и E-полей. Эти поля подчинены уравнениям Максвелла, которые в данном случае удобно представить в форме



$$\mathrm{rot}_\perp \vec{H}_k + j\Gamma_k [\vec{H}_k, \vec{z}_0] = j\omega\varepsilon_0 \vec{E}_k. \tag{2}$$

Здесь Γ_k — продольные волновые числа возможных (E- или H-) полей волновода, связанные, как известно, равенством

$$\Gamma_k^2 = k_0^2 - \chi_k^2 \qquad (k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0), \tag{3}$$

где χ_k — поперечные волновые числа.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_k &= \vec{E}_{zk} + \vec{E}_{\perp k}\\ \vec{H}_k &= \vec{H}_{\perp' k}\end{aligned}\right\} \text{ для } E\text{-полей}, \qquad \left.\begin{aligned}\vec{E}_k &= \vec{E}_{\perp' k}\\ \vec{H}_k &= \vec{H}_{zk} + \vec{H}_{\perp k}\end{aligned}\right\} \text{для } H\text{-полей}, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_{\perp k} &= -j\frac{\Gamma_k}{\chi_k^2}\nabla_\perp E_{zk}, \qquad \vec{H}_{\perp' k} = j\frac{\omega\varepsilon_0}{\chi_k^2}[\nabla_\perp E_{zk}, \vec{z}_0],\\ \vec{H}_{\perp k} &= -j\frac{\Gamma_k}{\chi_k^2}\nabla_\perp H_{zk}, \qquad \vec{H}_{\perp' k} = j\frac{\omega\mu_0}{\chi^2}[\vec{z}_0, \nabla_\perp H_{zk}].\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ортонормируя поля $\vec{E}$ $\vec{\ }$ в виде

$$\varepsilon_0 \int_{S_0} \vec{E}_k^* \vec{E}_n ds = \mu_0 \int_{S_0} \vec{H}_k^* \vec{H}_n ds = \delta_{kn}, \tag{6}$$

еем также соотношения

$$\varepsilon_0 \int_{S_0} \vec{E}_\perp^* \vec{\ } \ ds = \frac{\Gamma_k^2}{k_0^2} \delta_{kn}, \quad \mu_0 \int_{S_0} \vec{H}_{\perp k}^* \vec{H}_{\perp n} ds = \frac{\Gamma_k^2}{k_0^2} \delta_{kn}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_0 \int_{S_0} \vec{E}_{zk}^* \vec{E}_{zn} ds = \frac{\chi_k^2}{k_0^2} \delta_{kn}, \quad \mu_0 \int_{S_0} \vec{H}_{zk}^* \vec{H}_{zn} ds = \frac{\chi_k^2}{k_0^2} \delta_{kn}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_0 \int_{S_0} \vec{E}_{\perp' k}^* \vec{E}_{\perp n} ds = \mu_0 \int_{S_0} \vec{H}_{\perp' k}^* \vec{H}_{\perp n} = 0, \tag{9}$$

$$\int_{S_0} [\vec{E}_k^*, \vec{H}_n] ds = \frac{}{k_0^2} \delta_{kn}. \tag{10}$$

оме того, в дальнейшем будут использованы следующие равенства:

$$\vec{E}_{\perp' k} = \frac{\omega \mu_0}{\Gamma_k} [\vec{H}_{\perp k}, \vec{z}_0], \quad \vec{H}_{\perp k} = \frac{\Gamma_k}{\omega \mu_0} [\vec{z}_0, \vec{E}_{\perp' k}], \tag{11}$$

$$\vec{E}_{\perp k} = \frac{\Gamma_k}{\omega \varepsilon_0} [\vec{H}_{\perp' k}, \vec{z}_0], \quad \vec{H}_{\perp' k} = \frac{\omega \varepsilon_0}{\Gamma_k} [\vec{z}_0, \vec{E}_{\perp k}], \tag{12}$$

$$\mathrm{rot}_\perp \vec{E}_{zk} = -j \frac{\chi_k^2}{\omega \varepsilon_0} \vec{H}_{\perp' k}, \tag{13}$$

$$\mathrm{rot}_\perp \vec{E}_{\perp k} = 0, \tag{14}$$

$$\mathrm{rot}_\perp \vec{E}_{\perp' k} = -j \omega \mu_0 \vec{H}_{zk}, \tag{15}$$

$$\mathrm{rot}_\perp \vec{H}_{zk} = j \frac{\chi_k^2}{\omega \mu_0} \vec{E}_{\perp' k}, \tag{16}$$

$$\mathrm{rot}_\perp \vec{H}_{\perp k} = 0, \tag{17}$$

$$\mathrm{rot}_\perp \vec{H}_{\perp' k} = j \omega \varepsilon_0 \vec{E}_{zk}. \tag{18}$$

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Некоторое возможное поле волновода с анизотропным цилиндром означим $\vec{E}$, $\vec{H}$, а соответствующее ему продольное волновое число — Γ. к как в силу условий задачи внутри волновода возможны разрывы шь поперечных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а мы располагаем соленоидальными ($\vec{E}_{\perp' k}$, $\vec{H}_{\perp' k}$) и потенциальными ($\vec{E}_{\perp k}$, $\vec{H}_{\perp k}$) поперечми собственными функциями, то нет прямой необходимости, подобно му как это делалось в [1], переходить от напряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$ к советствующим индукциям. В данном случае можно взять за основу зложения вида

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_m (A'_{zm} \vec{E}_{zm} + A'_{\perp m} E_{\perp m}) + \sum A'_{\perp' n} \vec{E}_{\perp' n}, \\ \vec{H} &= \sum B'_{\perp' m} \vec{H}_{\perp' m} + \sum_n (B'_{zn} H_{zn} + B'_{\perp n} \vec{H}_{\perp n}) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

и затем из уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_\perp \vec{E} - j\Gamma\,[\vec{z}_0, \vec{E}] &= -j\omega \overleftrightarrow{\mu}(\vec{r})\,\vec{H}, \\ \operatorname{rot}_\perp \vec{H} + j\Gamma\,[\vec{H}, \vec{z}_0] &= j\omega \overleftrightarrow{\varepsilon}(\vec{r})\,\vec{E} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

найти связь между неизвестными коэффициентами в виде шести бесконечных систем уравнений. Однако выгоднее все же воспользоваться разложениями индукций $\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\,\vec{E}$ и $\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r})\,\vec{H}$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \sum_m (A_{zm}\vec{E}_{zm} + A_{\perp m}\vec{E}_{\perp m}) + \varepsilon_0 \sum_n A_{\perp' n}\vec{E}_{\perp' n}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \sum_m B_{\perp' m}\vec{H}_{\perp' m} + \mu_0 \sum_n (B_{zn}\vec{H}_{zn} + B_{\perp n}\vec{H}_{\perp n}), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

так как в этом случае число бесконечных систем сводится к четырем.

Итак, имея в виду использовать разложения (21), будем исходить из уравнений Максвелла, записанных относительно $\vec{D}$ и $\vec{B}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_\perp \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\,\vec{D} - j\Gamma\,[\vec{z}_0, \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\,\vec{D}] &= -j\omega\vec{B}, \\ \operatorname{rot}_\perp \overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r})\,\vec{B} + j\Gamma\,[\overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r})\,\vec{B}, \vec{z}_0] &= j\omega\vec{D}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Взяв первое из этих уравнений, умножим все его члены на H^*_{zk}, а обе части равенства, комплексно-сопряженного (16), умножим на $\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\,\vec{D}$. Комбинируя результаты с учетом тождества

$$\vec{B}\operatorname{rot}_\perp \vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}_\perp \vec{B} = \operatorname{div}_\perp [\vec{A}, \vec{B}],$$

интегрируя по S_0 и применяя двухмерный аналог теоремы Остроградского — Гаусса, находим

$$\int_{L_0} [\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\,\vec{D}, \vec{H}^*_{zk}]\,\vec{n}_0 dl = -j\omega \int_{S_0} \vec{B}\vec{H}^*_{zk}\,ds + j\frac{\chi_k^2}{\omega\mu_0}\int_{S_0} \vec{E}_{\perp' k}\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\,\vec{D}ds \tag{23}$$

($\vec{n}_0$ — единичная нормаль к S_0).

Внося сюда выражения (21) и учитывая свойства среды (1), а также ортонормировку (6)—(9), получаем

$$A_{\perp' k} = \sum_m A_{zm}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' k}\Delta\overleftrightarrow{\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{zm}\,ds + \sum_m A_{\perp m}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' k}\Delta\overleftrightarrow{\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{\perp m}\,ds + \\ + \sum_n A_{\perp' n}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' k}\Delta\overleftrightarrow{\varepsilon}_r^{-1}\overleftrightarrow{E}_{\perp' n}\,ds = B_{zk}. \tag{24}$$

Дальнейшие действия аналогичны. Из первой строчки (22) и (17) вытекает равенство

$$\int_{L_0} [\overleftrightarrow{\varepsilon}(\vec{r})\,\vec{D}, \vec{H}^*_{\perp k}]\,\vec{n}_0 dl - j\frac{\Gamma\Gamma_k}{\omega\mu_0}\int_{S_0} \vec{E}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\,\vec{D}ds = -j\omega\int_{S_0} \vec{B}\vec{H}^*_{\perp k}\,ds, \tag{25}$$

влекущее за собой

$$A_{\perp' k} + \sum_m A_{zm}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' k}\,\Delta\varepsilon_r^{-1}\vec{E}_{zm}\,ds + \sum A_{\perp m}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' k}\,\Delta\overleftrightarrow{\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{\perp m}\,ds + \\ + \sum_n A_{\perp' n}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' k}\,\Delta\overleftrightarrow{\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{\perp' n}\,ds = \frac{\Gamma_k}{\Gamma}B_{\perp k}. \tag{26}$$

Из первой строчки (22) и (18) имеем

$$\int\limits_{L_0} [\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\vec{D},\ \vec{H}^*_{\perp' k}]\vec{n}_0\,dl - j\omega\varepsilon_0\frac{\Gamma}{\Gamma_k}\int\limits_{S_0}\vec{E}^*_{\perp k}\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\vec{D}ds =$$

$$= -j\omega\int\limits_{S_0}\vec{H}^*_{\perp' k}\vec{B}ds + j\omega\varepsilon_0\int\limits_{S_0}\vec{E}^*_{zk}\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\vec{D}ds, \tag{27}$$

отсюда

$$A_{zk} + \frac{k_0^2}{\chi_k^2}\left\{\sum_m A_{zm}\varepsilon_0\int\limits_S \vec{E}^*_{zk}\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{zm}\,ds + \sum_m A_{\perp m}\varepsilon_0\int\limits_S \vec{E}^*_{zk}\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{\perp m}\,ds +\right.$$

$$\left. + \sum_n A_{\perp' n}\varepsilon_0\int\limits_S \vec{E}^*_{zk}\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{\perp' n}\,ds\right\} + \frac{\Gamma\Gamma_k}{\chi_k^2}A_{\perp k} +$$

$$+ \frac{\Gamma}{\Gamma_k}\frac{k_0^2}{\chi_k^2}\left\{\sum_m A_{zm}\varepsilon_0\int\limits_S \vec{E}^*_{\perp k}\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{zm}\,ds + \sum_m A_{\perp m}\varepsilon_0\int\limits_S \vec{E}^*_{\perp k}\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{\perp m}\,ds +\right.$$

$$\left. + \sum_n A_{\perp' n}\varepsilon_0\int\limits_S \vec{E}^*_{\perp k}\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}_r^{-1}\vec{E}_{\perp' n}\,ds\right\} = \frac{k_0^2}{\chi_k^2}B_{\perp' k}. \tag{28}$$

Совершенно таким же путем будем комбинировать второе из уравнений Максвелла (22) сначала с (13), затем с (14) и, наконец, с (15). результате получаются следующие три уравнения:

$$\frac{\chi_k^2}{\omega^2\varepsilon_0}\int\limits_{S_0}\vec{H}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r})\vec{B}ds = \int\limits_{S_0}\vec{D}\vec{E}^*_z\,ds, \tag{29}$$

$$\frac{\Gamma\Gamma_k}{\omega^2\varepsilon_0}\int\limits_{S_0}\vec{H}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r})\vec{B}ds = \int\limits_{S_0}\vec{D}\vec{E}^*_{\perp k}\,ds, \tag{30}$$

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_k}\mu_0\int\limits_{S_0}\vec{H}^*_{\perp k}\overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r})\vec{B}ds = -\mu_0\int\limits_{S_0}\vec{H}^*_z\overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r})\vec{B}ds + \int\limits_S\vec{D}\vec{E}^*_{\perp' k}\,ds. \tag{31}$$

Из (29)— подобно тому как это делалось выше, получаем

$$B_{\perp' k} + \sum_n B_{zn}\mu_0\int\limits_S\vec{H}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\Delta\mu}_r^{-1}\vec{H}_{zn}\,ds + \sum_n B_{\perp n}\mu_0\int\limits_S\vec{H}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\Delta\mu}_r^{-1}\vec{H}_{\perp n}\,ds +$$

$$+ \sum_m B_{\perp' m}\mu_0\int\limits_S\vec{H}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\Delta\mu}_r^{-1}\vec{H}_{\perp' m}\,ds = A_{zk}, \tag{32}$$

$$B_{\perp' k} + \sum_n B_{zn}\mu_0\int\limits_S\vec{H}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\Delta\mu}_r^{-1}\vec{H}_{zn}\,ds + \sum_n B_{\perp n}\mu_0\int\limits_S\vec{H}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\Delta\mu}_r^{-1}\vec{H}_{\perp n}\,ds +$$

$$+ \sum_m B_{\perp' m}\mu_0\int\limits_S\vec{H}^*_{\perp' k}\overleftrightarrow{\Delta\mu}_r^{-1}\vec{H}_{\perp' m}\,ds = \frac{\Gamma_k}{\Gamma}A_{\perp k}, \tag{33}$$

$$B_{zk} + \frac{k_0^2}{\chi_k^2}\left\{\sum_n B_{zn}\mu_0\int_S \vec{H}^*_{zk}\overleftrightarrow{\Delta\mu_r^{-1}}\vec{H}_{zn}\,ds + \right.$$

$$+\sum_n B_{\perp n}\mu_0\int_S \vec{H}^*_{zk}\overleftrightarrow{\Delta\mu_r^{-1}}\vec{H}_{\perp n}\,ds + \sum_m B_{\perp' m}\mu_0\int_S \vec{H}^*_{zk}\overleftrightarrow{\Delta\mu_r^{-1}}\vec{H}_{\perp' n}\,ds\Big\} +$$

$$+\frac{\Gamma\Gamma_k}{\chi_k^2}B_{\perp k} + \frac{\Gamma}{\Gamma_k}\frac{k_0^2}{\chi_k^2}\left\{\sum_n B_{zn}\mu_0\int_S \vec{H}^*_{\perp k}\overleftrightarrow{\Delta\mu_r^{-1}}\vec{H}_{zn}\,ds + \right.$$

$$\left.+\sum_n B_{\perp n}\mu_0\int_S \vec{H}^*_{\perp k}\overleftrightarrow{\Delta\mu_r^{-1}}\vec{H}_{\perp n}\,ds + \sum_m B_{\perp' m}\mu_0\int_S \vec{H}^*_{\perp k}\overleftrightarrow{\Delta\mu_r^{-1}}\vec{H}_{\perp' m}\,ds\right\} = \frac{k_0^2}{\chi_k^2}A_{\perp' k}. \tag{34}$$

Итак, получены шесть соотношений (24), (26), (28) и (32)—(34), связывающих неизвестные коэффициенты A_{zm}, $A_{\perp m}$, $A_{\perp' n}$, B_{zn}, $B_{\perp n}$ и $B_{\perp' m}$. При вариации индекса k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) они порождают шесть бесконечных систем уравнений. Введя для упрощения записи бесконечномерные векторы

$$\begin{aligned}
A_1 &= (A_{z1}, A_{z2}, A_{z3}, \ldots),\\
A_2 &= (A_{\perp 1}, A_{\perp 2}, A_{\perp 3}, \ldots),\\
A_3 &= (A_{\perp' 1}, A_{\perp' 2}, A_{\perp' 3}, \ldots),\\
B_1 &= (B_{z1}, B_{z2}, B_{z3}, \ldots),\\
B_2 &= (B_{\perp 1}, B_{\perp 2}, B_{\perp 3}, \ldots),\\
B_3 &= (B_{\perp' 1}, B_{\perp' 2}, B_{\perp' 3}, \ldots),
\end{aligned}$$

будем иметь, таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
\|\mathfrak{E}^{11}_{ik}\|A_1 + \|\mathfrak{E}^{12}_{ik}\|A_2 + \|\mathfrak{E}^{13}_{ik}\|\ A_3 &= B_1,\\
\|\mathfrak{E}^{21}_{ik}\|A_1 + \|\mathfrak{E}^{22}_{ik}\|A_2 + \|\mathfrak{E}^{23}_{ik}\|\ A_3 &= B_2,\\
\|\mathfrak{E}^{31}_{ik}\|A_1 + \|\mathfrak{E}^{32}_{ik}\|A_2 + \|\mathfrak{E}^{33}_{ik}\|\ A_3 &= B_3,\\
\|\mathfrak{M}^{11}_{ik}\|B_1 + \|\mathfrak{M}^{12}_{ik}\|B_2 + \|\mathfrak{M}^{13}_{ik}\|B_3 &= A_1,\\
\|\mathfrak{M}^{21}_{ik}\|B_1 + \|\mathfrak{M}^{22}_{ik}\|B_2 + \|\mathfrak{M}^{23}_{ik}\|B_3 &= A_2,\\
\|\mathfrak{M}^{31}_{ik}\|B_1 + \|\mathfrak{M}^{32}_{ik}\|B_2 + \|\mathfrak{M}^{33}_{ik}\|B_3 &= A_3.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Вид матриц $\|\mathfrak{E}^{\alpha\beta}_{ik}\|$ и $\|\mathfrak{M}^{\alpha\beta}_{ik}\|$ легко усматривается из выражений (24), (26) и т. д. Так, например,

$$\|\mathfrak{M}^{23}_{ik}\| = \Gamma\left\{[\Gamma_i^{-1}] + \left\|\Gamma_i^-\ \mu_0\int_S \vec{H}^*_{\perp' i}\overleftrightarrow{\Delta\mu_r^{-1}}\vec{H}_{\perp' k}\,ds\right\|\right\}$$

(все матрицы не выписываются).

3. НАХОЖДЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Как видно из (32) и (33) и, соответственно, из (24) и (26),

$$A_{zk} = \frac{\Gamma_k}{\Gamma}A_{\perp k} \tag{36}$$

и

$$B_{zk} = \frac{\Gamma_k}{\Gamma}A_{\perp k}, \tag{37}$$

так что число независимых векторов Γ сводится к четырем.

При помощи выражений (36) и (37) исключим векторы A_1 и B_1 из (35). При этом остаются лишь четыре матричных уравнения

$$\left.\begin{aligned} \|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{22}\|A_2 + \|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{23}\|A_3 &= B_2, \\ \|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{32}\|A_2 + \|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{33}\|A_3 &= B_3, \\ \|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{22}\|B_2 + \|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{23}\|B_3 &= A_2, \\ \|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{32}\|B_2 + \|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{33}\|B_3 &= A_3, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

причем элементы матриц $\|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{\alpha\beta}\|$ имеют вид

$$\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{22} = \varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' i} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{zk}\, ds + \frac{\Gamma}{\Gamma_i}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' i} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{\perp k}\, ds,$$

$$\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{23} = \frac{\Gamma}{\Gamma_i}\left(\delta_{ik} + \varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp' i} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{\perp' k}\, ds\right),$$

$$\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{32} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}\frac{\chi_i^2 + \Gamma^2}{k_0^2}\delta_{ik} + \frac{\Gamma_i}{\Gamma}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{zi} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{zk}\, ds + \varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{zi} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{\perp k}\, ds +$$

$$+ \varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp i} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{zk}\, ds + \frac{\Gamma}{\Gamma_i}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp i} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{\perp k}\, ds,$$

$$\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{33} = \varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{zi} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{\perp' k}\, ds + \frac{\Gamma}{\Gamma_i}\varepsilon_0 \int_S \vec{E}^*_{\perp i} \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}} \vec{E}_{\perp' k}\, ds,$$

$\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{\alpha\beta}$ получаются из $\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{\alpha\beta}$ заменой $\vec{E}$ (с соответствующими индексами) на $\vec{H}$ (с теми же индексами), ε_0 на μ_0 и $\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon_r^{-1}}$ на $\overleftrightarrow{\Delta\mu_r^{-1}}$.

Из (38) нетрудно исключить все векторы кроме одного. Оставляя B_2, записываем следующее матричное уравнение:

$$\{\|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{22}\|\|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{22}\| + \|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{23}\|\|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{32}\| - 1\}B_2 - \{\|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{22}\|\|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{23}\| + \|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{23}\|\|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{33}\|\} \times$$

$$\times \{\|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{32}\|\|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{23}\| + \|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{33}\|\|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{33}\| - 1\}^{-1}\{\|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{32}\|\|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{22}\| + \|\widetilde{\mathfrak{E}}_{ik}^{33}\|\|\widetilde{\mathfrak{M}}_{ik}^{32}\|\} \tag{39}$$

или короче:

$$\|G_{ik}\|B_2 = 0. \tag{39a}$$

Уравнение для постоянной распространения Γ возникает при обращении в нуль определителя этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13}\ldots \\ G_{21} & G_{22} & G_{23}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0. \tag{40}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По сравнению с задачей о волноводном трансформаторе [3] решенная в данной части работы задача о волноводе с регулярным анизотропным заполнением более абстрактна. Это, однако, не исключает практической значимости полученных результатов, так как вычислительная работа здесь в ряде случаев может оказаться гораздо менее трудоемкой, чем для задач [3]. Особенно легко находятся постоянные распространения волноводов, целиком заполненных анизотропной (например, гиромагнитной) средой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Никольский, Исследование полых систем с анизотропными областями методом собственных функций. Ч. I. Резонатор, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 11, 1802.
2. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Изд. ВКАС, 1949.
3. В. В. Никольский, Исследование полых систем с анизотропными областями методом собственных функций. Ч. II. Волноводный трансформатор, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 1960.

Поступила в редакцию
13 V 1960

Примечания при корректуре

1. Во всей статье (ч. I — III) задача формулировалась в уравнениях Максвелла. Удобнее (особенно в ч. I) взять в основу одно из уравнений 2-го порядка, например,

$$L\vec{D} = \omega^2\vec{D}, \quad L \equiv \operatorname{rot}\overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r})\operatorname{rot}\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r}) \tag{1}$$

или

$$M\vec{B} = \omega^2\vec{B}, \quad M \equiv \operatorname{rot}\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}(\vec{r})\ \operatorname{rot}\overleftrightarrow{\mu}^{-1}(\vec{r}). \tag{1a}$$

Тогда элементы матриц $\|\mathfrak{E}_{kn}\|$ и $\|\mathfrak{M}_{kn}\|$ в ч. I (10′) принимают простой вид:

$$\mathfrak{E}_{kn} = \varepsilon_0\int\limits_{V_0}\vec{E}_k^*L\vec{E}_n\,dv \text{ и } \mathfrak{M}_{kn} = \mu_0\int\limits_{V_0}\vec{H}_k^*M\vec{H}_n\,dv. \tag{2}$$

2. При разложении вектора $\vec{B}$ в ч. II в соответствии с теоремой Губо (ч. I, [13]) следовало кроме вихревых брать и потенциальные функции ($B_n \neq 0$ на S_Σ!). На существенность этого обстоятельства обратил внимание автора В. Г. Сухов. Для внесения коррективы надо учесть, что в (2) ч. II среди $\vec{H}_k$ есть и такие ($k = k'$), для которых $\operatorname{rot}\vec{H}_{k'} = 0$, что равносильно требованию $\omega_{k'} = 0$ в (2). Тогда вместо (2), ч. II имеем

$$\left.\begin{aligned}&\{[\omega_k] + \|\omega_k\vartheta_{kn}\|\}A = \omega B - jF,\\ &\{[\omega_k] + \|\omega_k M_{kn}\|\}B = \omega A - j\frac{1}{\omega}\|\omega_k M_{kn'}\|F'\end{aligned}\right\},\quad B' = \frac{j}{\omega}F' \tag{3}$$

(штрих при индексе означает, что в соответствующем выражении фигурирует не вихревая, а потенциальная функция).

При пользовании результатами ч. II надо исходить из корректированных уравнений (3), либо в (6), ч. II иметь в виду только (5), ч. II.

Нетрудно также получить более лаконичную формулировку вспомогательной задачи о возбуждении в ч. II на основе одного из уравнений 2-го порядка. Дифференциальный оператор уравнения (1) или (1а) преобразуется так, чтобы выделить затем поверхностный интеграл. Существенно, что как $\vec{B}$, так и $\vec{D}$ разлагаются по магнитным функциям. Соответствующие результаты здесь не выписываются.

НЕОБРАТИМОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ, ПОМЕЩЕННОМ В ФЕРРИТОВУЮ СРЕДУ

Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, Л. А. Шишкин, И. П. Якименко

Исследовано распространение электромагнитных волн в спиральном волноводе, помещенном в реальную ферритовую среду, при наличии постоянного магнитного поля, приложенного вдоль оси системы. Определен коэффициент затухания и произведены численные расчеты затухания для прямых и обратных волн.

ВВЕДЕНИЕ

В обзоре [1] указано, что если спираль окружить ферритовой средой и приложить вдоль оси системы постоянное магнитное поле H_0, то предвидеть ощественный гиромагнитный эффект для такой системы невозможно. Там е отмечено, что «никакого теоретического объяснения этому устройству сих пор не предложено». В то же время в экспериментальной работе [2] олучен коэффициент направленности (отношение ослабления в обратном правлении к ослаблению в прямом направлении) для такой системы, рав ий 6 : 1. Авторы работы [2] считают, что такой коэффициент направлен ости значительно выше, чем это следует из элементарной теории, которая ределяет степень направленности в зависимости от эксцентриситета эл пса, описываемого вектором магнитного поля в плоскости, перпендику рной постоянному магнитному полю. При этом в [2] справедливо пред ложено, что расхождение результатов эксперимента с элементарной тео ией вызвано влиянием магнитной проницаемости феррита на эксцентри тет эллипсов, описываемых магнитным вектором.

Естественно, что электродинамическое решение этой задачи должно ривести к правильному значению величины коэффициента направленности. дача о распространении волн в системе спираль — ферритовая среда при аличии продольного подмагничивания для идеального случая отсутствия ак диэлектрических, так и магнитных потерь в среде решена в работе авто ов [3]. В ней показано, что фазовые скорости прямых и обратных волн личаются друг от друга; это отличие тем больше, чем меньше котангенс гла намотки спирали.

Настоящая работа посвящена изучению необратимого распространения олн в спиральном волноводе при наличии реальной ферритовой среды, об дающей как диэлектрическими, так и магнитными потерями, носящими еррорезонансный характер. Проведенные расчеты полностью оправдывают озможность получения в рассматриваемой системе достаточно больших оэффициентов направленности (до 8 : 1), что можно эффективно использо ать при конструировании ферритовых ослабителей в усилителях на лампе бегущей волной.

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЕ ПРИ МАЛЫХ ПОТЕРЯХ

Если исследуемая система состоит из спирального волновода (радиус пирали R, угол намотки Θ), заключенного в ферритовый кожух есконечной толщины, то, как установлено в [3] (случай продольного одмагничивающего поля), ее дисперсионное уравнение можно пред-

ставить следующим образом:

$$f_1 = f_2 + f_3, \tag{1}$$

где

$$f_1 = y^2\left\{1 - \frac{K_0(|y|\sqrt{\mu})\,I_1(|y|)}{K_1(|y|/\sqrt{\mu})\,I_0(|y|)}\right\}\frac{I_0(|y|)\,K_0(|y|)}{I_1(|y|)\,K_1(|y|)};$$

$$f_2 = x^2\operatorname{ctg}^2\Theta\left\{\varepsilon + \frac{I_1(|y|)\,K_0(|y|)}{I_0(|y|)\,K_1(|y|)}\right\};$$

$$f_3 = -2\varepsilon\frac{x^2\varkappa}{\mu-1}\operatorname{ctg}\Theta\left\{1 - \frac{I_0(|y|/\sqrt{\mu})\,K_1(|y|)}{K_1(|y|/\sqrt{\mu})\,K_0(|y|)}\right\}\frac{K_0(|y|)}{K_1(|y|)}\operatorname{sign} y; \tag{2}$$

$$x = \frac{\omega}{c}R = kR;\quad y = \frac{\omega}{v_\Phi}R = \beta R,\quad \operatorname{sign} y = \begin{cases}+1, & y>0,\\ -1, & y<0\end{cases}$$

(ω — круговая частота сигнала; k — волновое число в свободном пространстве; v_Φ — фазовая скорость волны; c — скорость света в вакууме; ε — диэлектрическая проницаемость феррита; μ и $\varkappa$ — составляющие тензора магнитной проницаемости).

Уравнение (1) справедливо для случая больших замедлений и в области частот, определяемых неравенством

$$\frac{y^2}{x^2}\sigma^2 \gg 4\varepsilon \tag{3}$$

($\sigma = \omega_0/\omega$; ω_0 — резонансная частота). Случай больших замедлений означает, что выполнено условие

$$y^2 \gg x^2\varepsilon\mu. \tag{4}$$

Так как в качестве исходного дисперсионного уравнения в этой работе берется уравнение (1), то все дальнейшие результаты будут верны при соблюдении условий (3), (4).

Уравнение (1) получено в предположении, что диэлектрические и магнитные потери отсутствуют. Когда в системе имеются потери, дисперсионное уравнение внешне сохраняет вид (1), но величины μ, $\varkappa$, ε и y уже имеют комплексные значения:

$$\mu = \mu' + i\mu'';\quad \varkappa = \varkappa' + i\varkappa'';\quad \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'';\quad y = y' + iy''. \tag{5}$$

Величины μ и $\varkappa$ можно получить из уравнения движения магнитного момента [4]

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma[\vec{M},\vec{H}] - \frac{\alpha\gamma}{M}[\vec{M}[\vec{M},\vec{H}]], \tag{6}$$

где γ — гиромагнитное отношение; $\alpha = \Delta H/2H_{\text{рез}}$ — параметр, определенный из ширины резонансной кривой (ΔH — ширина кривой на уровне $\mu'' = \mu''_{\text{рез}}/2$). Если переменные составляющие магнитного поля малы по сравнению с аксиально направленным постоянным полем и если переменное поле имеет гармоническую временну́ю зависимость вида $\exp(-i\omega t)$, то

$$\mu' - 1 = \frac{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)+2\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)^2+4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}\frac{v}{u};\qquad \mu'' = \frac{\frac{vx}{u^2}\left(1+\frac{x^2}{u^2}\right)\alpha}{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)^2+4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2};$$

$$\varkappa' = \frac{\frac{vx}{u^2}\left(\frac{x^2}{u^2}-1\right)}{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)^2+4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2};\qquad \varkappa'' = \frac{2\frac{vx^2}{u^3}\alpha}{\left(1-\frac{x^2}{u^2}\right)^2+4\frac{x^2}{u^2}\alpha^2}, \tag{7}$$

где $u = \frac{\gamma H_0}{c}R$, $v = \frac{4\pi\gamma M}{c}R$ — безразмерные параметры (M — намагниченность при насыщении; H_0 — постоянное поле в феррите).

Типичные резонансные кривые для μ' и μ'' показаны на рис. 1. этих кривых видно, что в области частот, примыкающих к резонансной, величина μ'' может стать равной μ' и даже превзойти ее. настоящей работе рассматривается случай малых потерь, для которого справедливы следующие неравенства:

$$\mu'' \ll \mu'; \quad \varkappa'' \ll \varkappa'; \quad \varepsilon'' \ll \varepsilon'; \quad y'' \ll y'. \tag{8}$$

Таким образом, к условиям (3) (4) добавляются еще условия (8). и достаточно больших значениях Θ все эти ограничивающие условия сводятся к тому, что полученные результаты нельзя использовать на частотах, слишком близких резонансным (при $\operatorname{ctg}\Theta = 10$ на частотах бо́льших $0{,}95\,\omega_0$).

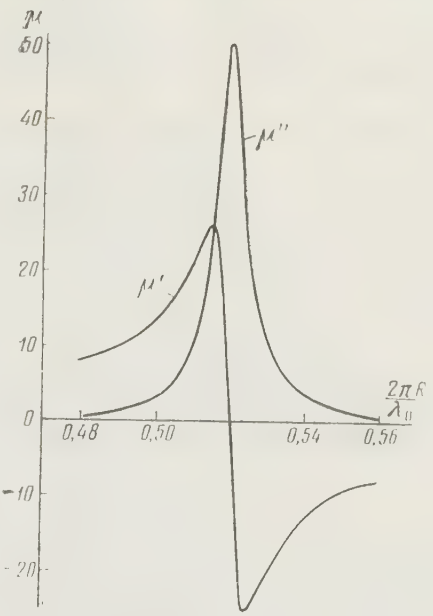


Рис. 1. Зависимость μ от параметра $2\pi R/\lambda_0$ при $v = 0{,}52$, $u = 0{,}52$, $\alpha = 10^{-2}$

Если условия (8) выполняются, то все функции, входящие в (1), можно разложить в ряд Тейлора:

$$f_1 = f_1' + if_1''; \quad f_2 = f_2' + if_2''; \quad f_3 = f_3' + if_3'', \tag{9}$$

$$f_1' = f_1(y', \zeta'); \quad f_2' = f_2(y', \varepsilon'); \quad f_3' = f_3(y', \varkappa', \varepsilon', \zeta');$$
$$f_1'' = y'' \frac{\partial f_1'}{\partial y'} + \zeta'' \frac{\partial f_1'}{\partial \zeta'}; \quad f_2'' = y'' \frac{\partial f_2'}{\partial y'} + \varepsilon'' \frac{\partial f_2'}{\partial \varepsilon'}; \tag{10}$$
$$f_3'' = y'' \frac{\partial f_3'}{\partial y'} + \varkappa'' \frac{\partial f_3'}{\partial \varkappa'} + \varepsilon'' \frac{\partial f_3'}{\partial \varepsilon'} + \zeta'' \frac{\partial f_3'}{\partial \zeta'},$$

дисперсионное уравнение (1) имеет вид

$$f_1' + if_1'' = f_2' + if_2'' + f_3' + if_3''. \tag{11}$$

Приравнивая в (11) действительные части, получим

$$f_1' = f_2' + f_3', \tag{12}$$

совпадает с дисперсионным уравнением (1) для случая отсутствия потерь. Из сравнения мнимых частей (11) находим коэффициент затухания системы

$$y'' = \frac{\varepsilon''\left(\frac{\partial f_2'}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial f_3'}{\partial \varepsilon'}\right) + \zeta''\left(\frac{\partial f_3'}{\partial \zeta'} - \frac{\partial f_1'}{\partial \zeta'}\right) + \varkappa'' \frac{\partial f_3'}{\partial \varkappa'}}{\frac{\partial f_1'}{\partial y'} \quad \frac{\partial f_2'}{\partial y'} \quad \frac{\partial f_3'}{\partial y'}}. \tag{13}$$

Рассмотрим сначала случай, когда функции Бесселя можно заменить их асимптотическими значениями (большие величины аргументов функций Бесселя). Этот случай имеет место, когда $R \to \infty$ (цилиндрический спиральный волновод превращается в анизотропно проводящую плоскость, т. е. плоскую спираль) или когда частота сигнала очень большая. Функции f'_1, f'_2 и f'_3 запишутся теперь следующим образом:

$$f'_1 = y'^2(1+\zeta'); \; f'_2 = (\varepsilon'+1)x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta; \; f'_3 = -2\varepsilon' x^2 \operatorname{ctg}\Theta \frac{\varkappa'\zeta'^2}{1+\zeta'} \operatorname{sign} y. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), находим

$$y'' = \frac{1}{2y'(1+\zeta')}\left\{\varepsilon'' x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta\left[1 - \frac{2\varkappa'\zeta'^2}{(1+\zeta')\operatorname{ctg}\Theta}\operatorname{sign} y\right] + \right.$$
$$\left. + \zeta''\left[y'^2 + \frac{2x^2\zeta'\varkappa'\varepsilon'(2+\zeta')}{(1+\zeta')^2}\operatorname{sign} y\right] - \frac{2\varkappa''\varepsilon'\zeta'^2 x^2 \operatorname{ctg}\Theta}{1+\zeta'}\operatorname{sign} y\right\}. \quad (15)$$

где $\zeta' = 1/\sqrt{\mu}; \; \zeta'' = \mu''/2\mu'\sqrt{\mu'}.$

В общем случае необходимо использовать функции f'_1, f'_2 и f'_3 в виде (10). Подставляя (10) в (13) и производя соответствующие преобразования, получим выражение для коэффициента потерь в виде

$$y'' = \frac{\varepsilon'' x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta(1-\varkappa' A) - \varkappa'' x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta\varepsilon' A + }{y'^2 B - x^2\operatorname{ctg}^2\Theta C + 2\varepsilon' x^2 \operatorname{ctg}\Theta \frac{\varkappa'\zeta'^2}{1-\zeta'^2} D}$$
$$+ \frac{\zeta''\left[\zeta' y'^3 \frac{K_0}{K_1}\Phi + \frac{2\varkappa'\varepsilon' x^2 \operatorname{ctg}\Theta}{1-\zeta'^2}\left(\frac{A\operatorname{ctg}\Theta}{\zeta'} - \zeta'^3 y'\Phi\operatorname{sign} y\right)\right]}{y'^2 B - x^2\operatorname{ctg}^2\Theta C + 2\varepsilon' x^2\operatorname{ctg}\Theta\frac{\varkappa'\zeta'^2}{1-\zeta'^2}D}, \quad (16)$$

где $A = \frac{2\zeta'^2 \operatorname{tg}\Theta}{1-\zeta'^2}\left(\frac{K_0}{K_1} - \frac{K'_0}{K'_1}\zeta'\right)\operatorname{sign} y; \; C = \frac{(I_1K_0 + I_0K_1)(I_0K_0 - I_1K_1)}{I_0^2K_1^2};$

$$B = \frac{K_1K_0(I_1^2 - I_0I_2) + I_1I_0(K_0K_2 - K_1^2)}{I_1^2K_1^2} +$$
$$+ \zeta'\frac{K'_0K'_1(K_0K_2 - K_1^2) + \zeta' K_0K_1(K'_0K'_2 - K'^2_1)}{K_1^2K'^2_1}; \quad (17)$$

$$D = \left\{K_1^{-2}\left(\frac{1}{y'}K_0K_1 + K_0^2 - K_1^2\right) - \zeta'^2 K_1'^{-2}\left(\frac{1}{\zeta' y'}K'_0K'_1 + K'^2_1 - K'^2_2\right)\right\}\operatorname{sign} y;$$

$$\Phi = \frac{K'_0K'_2 - K'^2_1}{K'^2_1}$$

(функции Бесселя со штрихом имеют аргументы, равные $|y'|/\sqrt{\mu'}$, остальные, без штриха, $-|y'|$).

Если воспользоваться асимптотическими значениями функций Бесселя при больших значениях их аргументов, то для величин A, B, C, D, Φ в (17) получим следующие значения:

$$A = \frac{2\zeta'^2 \operatorname{sign} y}{(1+\zeta')\operatorname{ctg}\Theta}; \; B = \frac{2(1+\zeta')}{y'}; \; C = O\left(\frac{1}{y'}\right) \to 0;$$

$$D = O\left(\frac{1}{y'}\right) \to 0; \; \Phi = \frac{1}{\zeta' y'}. \quad (18)$$

осле подстановки (18) в (16) получается, как и следовало ожидать, ормула (15), определяющая коэффициент затухания для плоской пирали.

При $H_0 \to 0$, когда феррит размагничивается, $\varkappa' \to 0$, $\varkappa'' \to 0$, $\mu'' \to 0$, $\to 1$ и из (16) имеем

$$y'' = \varepsilon'' \left\{ \frac{y'^2}{x^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta} \left[\frac{K_0}{I_1^2 K_1} (I_1^2 - I_0 I_2) + \frac{K_0}{K_1^3} (K_0 K_2 - K_1^2) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{y'(K_0 K_2 - K_1^2)}{I_1 K_1^3 x^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta} - \frac{(I_1 K_0 + I_0 K_1)(I_0 K_0 - I_1 K_1)}{I_0^2 K_1^2} \right\}^{-1}. \qquad (19)$$

исперсионное уравнение системы в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{y'^2}{x^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta} = \frac{I_1 K_1}{I_0 K_0} (I_1 K_0 + \varepsilon' I_0 K_1). \qquad (20)$$

одставляя (20) в (19), после ряда преобразований получим

$$y'' = \varepsilon'' \left\{ \left(\frac{K_0}{I_0^2 K_1} + \frac{y'^2}{x^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta} \frac{K_0}{I_1^2 K_0} \right) (I_1^2 - I_0 I_2) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\varepsilon'}{K_0 K_1} + \frac{y'^2}{x^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta} \frac{K_0}{K_1^3} \right) (K_0 K_2 - K_1^2) \right\}^{-1},$$

го в точности совпадает с выражением для затухания в системе пираль — диэлектрик, полученном в [5] (с учетом того, что диэлектрик аходится внутри спирали).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАТУХАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Затухание электромагнитных волн, распространяющихся в исследуемой системе, вносимое средой, можно определить также, вычислив мощность потерь в среде и полный поток мощности вдоль оси системы, использовавшись соотношением

$$y'' = \frac{\bar{P}_э + \bar{P}_m}{2P_\Sigma}, \qquad (21)$$

де

$$P_\Sigma = \frac{c}{8\pi} \int_S [\vec{E}, \vec{H}^*]_z \, ds \qquad (22)$$

P_Σ — полный поток мощности вдоль оси системы; $\vec{E}$, $\vec{H}$ — векторы электрического и магнитного полей; S — поверхность, охватывающая бъем V);

$$\bar{P}_э = \int_V \bar{p}_э \, dv; \quad \bar{p}_э = \frac{\omega \varepsilon''}{8\pi} |\vec{E}|^2 \qquad (23)$$

$\bar{p}_э$ — плотность электрических потерь при данной частоте монохроматических колебаний ω);

$$\bar{P}_m = \int_V \bar{p}_m \, dv, \qquad (24)$$

$$\bar{p}_m = \frac{\omega \mu''}{8\pi} (|H_\varphi|^2 + |H_r|^2) + \frac{\omega \varkappa''}{4\pi} (H_{r2} H_{\varphi 1} - H_{r1} H_{\varphi 2}) \qquad (25)$$

$\bar{p}_m$ — плотность магнитных потерь при частоте монохроматических олебаний ω; $H_r = H_{r1} + iH_{r2}$; $H_\varphi = H_{\varphi 1} + iH_{\varphi 2}$ в общем случае). Полный

поток мощности вдоль оси системы [1] имеет вид

$$P_\Sigma = \frac{cx}{8y'} R^2 E_0^2 \frac{I_0^2}{K_0^2} F(m, \operatorname{ctg}\Theta, \varepsilon', \varkappa', \mu'), \tag{26}$$

где

$$F = (I_1^2 - I_0 I_2)\left(m^2 \frac{K_0^2}{I_1^2} \operatorname{tg}^2\Theta + \frac{K_0^2}{I_0^2}\right) + \frac{m^2\Pi^2}{\mu}\left(\frac{K_0' K_2'}{K_1'^2} - 1\right) +$$
$$+ \varepsilon'(K_0 K_2 - K_1^2) + \frac{2\varepsilon'\varkappa'\Pi}{y'(\mu' - 1) K_1'}\left(K_1' K_0 - \frac{K_0' K_1}{\sqrt{\mu'}}\right) \operatorname{sign} y; \tag{27}$$

$$\Pi^2 = \frac{\varepsilon'\varkappa' K_1}{m^2(\mu' - 1)} \operatorname{sign} y - K_0 \operatorname{tg}\Theta;\ m = \frac{y'}{x}.$$

Как и в формулах (17), функции Бесселя со штрихом имеют аргументы $|y'|/\sqrt{\mu'}$, а без штриха — $|y'|$.

Составляющие поля, входящие в (23), согласно [1] можно представить следующим образом:

$$E_r = i\left(\frac{\Pi}{\sigma K_1'} K_{1r}' + K_{1r}\right)\frac{I_0}{K_0} E_0 \operatorname{sign} y;$$
$$E_\varphi = \frac{\varepsilon'}{m^2\sigma}\left(\frac{m^2\sigma\Pi}{\varepsilon' K_1'} K_{1r}' - K_{1r}\right)\frac{I_0}{K_0} E_0 \operatorname{sign} y;$$
$$E_z = \left(\frac{\Pi}{\sigma\sqrt{\mu'} K_1'} K_{0r}' + K_{0r}\right)\frac{I_0}{K_0} E_0; \tag{28}$$
$$H_\varphi = i\frac{\varepsilon'}{m}\left(\frac{\Pi}{\sigma K_1'} K_{1r}' + K_{1r}\right)\frac{I_0}{K_0} E_0 \operatorname{sign} y;$$
$$H_r = -\frac{\varepsilon'}{m\sigma}\left(\frac{m^2\sigma\Pi}{\varepsilon'\mu' K_1'} K_{1r}' - K_{1r}\right)\frac{I_0}{K_0} E_0 \operatorname{sign} y$$

(функции Бесселя с индексом r имеют аргумент, зависящий от текущего радиуса r).

Подставляя (23) — (27) в (21), получим

$$y'' = \frac{\int_0^R [\varepsilon''|\vec{E}|^2 + \mu''(|H_\varphi|^2 + |H_r|^2) + 2\varkappa''(H_{r2}H_{\varphi 1} - H_{r1}H_{\varphi 2})]\, r\, dr}{\frac{R^2 E_0^2}{|y'|}\frac{I_0^2}{K_0^2} F}. \tag{29}$$

Наконец, после подстановки составляющих поля (28) в (29), определим коэффициент затуханий

$$y'' = \frac{K_0 K_1}{x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta F}\left\{\varepsilon'' x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta(1 - \varkappa' A) - \varkappa'' x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta\varepsilon' A + \right.$$
$$\left. + \zeta''\left[\zeta' y'^3 \frac{K_0}{K_1}\Phi + \frac{2\varkappa'\varepsilon' x^2 \operatorname{ctg}\Theta}{1 - \zeta'^2}\left(\frac{A \operatorname{ctg}\Theta}{\zeta'} - \zeta'^3 y' \Phi \operatorname{sign} y\right)\right]\right\} \tag{30}$$

(при выводе выражения (23) члены второго порядка малости, согласно (3), (4), были отброшены).

Выражение для y'' (30) после некоторых преобразований можно в точности привести к виду (16).

Таким образом, полученные двумя способами формулы для коэффициента затухания (16) и (30), полностью совпадают. Прежде чем переходить к ко-

ачественному анализу полученных соотношений, необходимо сделать одно щественное замечание. Легко заметить, что из уравнения (15) следует зможность получения для прямой волны ($\operatorname{sign} y = 1$) значений $y'' < 0$. Действительно, если

$$y'^2 = -2x^2 \operatorname{ctg}\Theta \frac{\zeta'\varepsilon'\varkappa'(2+\zeta')}{(1+\zeta')^2} \tag{31}$$

$$2\varkappa'' x^2 \operatorname{ctg}\Theta \frac{\varepsilon'\zeta'^2}{1+\zeta'} > \varepsilon'' x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta \left[1 - \frac{2\varkappa'\zeta'^2}{(1+\zeta')\operatorname{ctg}\Theta}\right], \tag{32}$$

$y'' < 0$.

Из дисперсионного уравнения рассматриваемой системы следует, о (31) может быть удовлетворено, например, для $\operatorname{ctg}\Theta = 10$ уже на стотах, равных $0{,}9\,\omega_0$. Неравенство (32) на таких частотах также олняется (за счет сильного роста $\varkappa''$ согласно (7), тогда как = const). Но если $y'' < 0$, то это означает усиление прямой волны, о в данном случае лишено физического смысла. Чтобы объяснить лученный результат, обратимся к ограничивающим условиям (3), (4). ля случая комплексных значений величин $\mu, \varkappa, \varepsilon$ условия (3), (4) распа-ются на следующие четыре неравенства:

$$y'^2 \gg x^2\varepsilon\mu'; \; y'^2 \gg \frac{4x^2\varepsilon'}{\sigma^2}; \; 2y'y'' \gg x^2(\varepsilon'\mu'' + \mu'\varepsilon''); \; 2y'y'' \gg \frac{4x^2\varepsilon''}{\sigma^2}. \tag{33}$$

ервые два неравенства (33) безусловно выполняются при тех замед-ниях и частотах, которые мы рассматриваем; другие два неравен-ва (33) при $y'' \leqslant 0$ не могут иметь места. Значит при получении сперсионного уравнения составляющих полей и потока мощности следуемой системы уже нельзя отбрасывать $x^2\varepsilon\mu$ по сравнению с y'^2. жно показать, что если при получении дисперсионного уравнения льзоваться только первыми двумя неравенствами (33) и считать, что а других неравенства (33) в общем случае не выполняются, то дей-вительная часть дисперсионного уравнения приобретает вид (12), мнимая часть несколько изменится, что приведет к иному значению

$$y'' = \frac{\varepsilon'' L + \varkappa'' Q + \mu'' T}{2y'\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mu'}}\right)}, \tag{34}$$

е

$$L = -x^2 \operatorname{ctg}^2\Theta \left[1 - 2\operatorname{tg}\Theta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu'}}\right)\frac{x}{u}\operatorname{sign} y\right];$$

$$Q = -\frac{2\varepsilon' x^2 \operatorname{ctg}\Theta}{\mu'\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mu'}}\right)}\operatorname{sign} y; \; T = T_1 + \delta; \tag{35}$$

$$T_1 = \frac{1}{\mu'\sqrt{\mu'}}\left[y'^2 - 2x^2 \operatorname{ctg}\Theta\left(\frac{2\sqrt{\mu'}}{1 + \frac{1}{\sqrt{\mu'}}} - 1\right)\varepsilon'\frac{x}{u}\operatorname{sign} y\right];$$

$$\delta = 2x^2\varepsilon'\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu'}}\right).$$

авнивая (34) с (15), замечаем, что L, Q, T совпадают с соответствую-ими членами (15), а δ представляет собой не учитываемую ранее бавку. Можно теперь показать, пользуясь дисперсионным уравне-ем (12), что нулевые или отрицательные значения y'' не могут иметь ста.

Выражение (34) для определения коэффициента затухания является более точным по сравнению с (15); оно верно для всех частот, где справедливы первые два неравенства (33). Уравнение (15) становится неточным по мере приближения к резонансу ранее, чем (34). Поэтому в дальнейшем при количественном анализе величин затухания прямой и обратной волны выражение (34) будет использовано для y''.

Отметим также, что во всем предыдущем изложении не учитывались потери в спирали; это можно сделать так же, как и в [5]. Потери в спирали, рассчитанные в [5], имели порядок 10^{-3}, поэтому их роль при приближении к резонансу невелика.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для иллюстрации рассмотрим ряд расчетов, которые позволяют сделать соответствующие выводы о характере распространения прямых и обратных волн в системе. Коэффициент затухания y'' будем определять для ряда значений постоянного магнитного поля H_0, характеризуемого величиной $u = \gamma H_0 R/c$; намагниченности феррита M, пропорциональной $v = 4\pi\gamma MR/c$; диэлектрической проницаемости феррита; фактора затухания α и двух значений $\operatorname{ctg}\Theta$ (10 и 20).

При тех частотах и $\operatorname{ctg}\Theta$, для которых ведем расчет, нет надобности пользоваться довольно сложной формулой (16), поскольку достаточно точные результаты дает соотношение (34) (т. е. все расчетные случаи приближаются к случаю высоких частот). Поэтому все расчеты выполнены по формуле (34) с использованием составляющих тензора μ_{ik}, определенным согласно (7). Вследствие того, что при потерях, ограниченных условием (8), дисперсионное уравнение для вычисления y' сохраняет тот же вид, что и в случае идеального феррита, значения y' в (34) возьмем из соответствующих графиков работы [3].

Расчетные кривые приведены на рис. 2—5. Они определяют всю совокупность значений ослабления прямых и обратных волн для двух значений магнитного поля ($u = 0{,}56$ и $u = 0{,}19$), двух значений намагниченности ($v = 0{,}52$ и $v = 0{,}19$), двух значений мнимой части диэлектрической проницаемости феррита ($\varepsilon'' = 10^{-2}$ и $\varepsilon'' = 10^{-1}$; $\varepsilon' = 10$) и двух значений параметра α ($\alpha = 10^{-3}$ и $\alpha = 10^{-2}$).

Отметим, что кривые рис. 2, *а* — 5, *а* могут служить также для определения затухания при $\alpha = 10^{-2}$ и $\varepsilon' = 10^{-1}$. Для этого достаточно, как это следует из (34), умножить величину ординаты на соответствующих графиках на 10.

Анализ кривых рис. 2—5 позволяет сделать следующие выводы.

1. Волны, распространяющиеся в системе в направлении $+z$ (прямые волны) и в направлении $-z$ (обратные волны), имеют неодинаковый коэффициент затухания. Разница между затуханием в прямом и обратном направлениях возрастает по мере приближения к резонансной частоте и может достигать весьма больших значений (например, при $\operatorname{ctg}\Theta = 10$, $u = 0{,}52$, $v = 0{,}19$; при $x = 0{,}5$ отношение затухания в обратном направлении к затуханию в прямом направлении равно 7,7 (рис. 2, *в*)). Коэффициент направленности может достигать максимального значения, а затем уменьшаться (для приведенного примера при изменении x от 0,5 до 0,51 коэффициент направленности падает от 7,7 до 4,5)).

2. Зависимость затухания от намагниченности при данном магнитном поле невелика, особенно при увеличении $\operatorname{ctg}\Theta$ (в связи с этим на рис. 4,*а*, 4,*в*, 5,*а*, 5,*в* для прямых волн проведены только кривые для $v = 0{,}52$, так как они почти совпадают с кривыми для $v = 0{,}19$).

3. На частотах, одинаково удаленных от резонансной ($x/u = \text{const}$), большие затухания существуют при меньших магнитных полях (так, при $\operatorname{ctg}\Theta = 20$ и $x/u = 0{,}9$ затухание при $u = 0{,}52$ в два раза больше, чем при $u = 0{,}19$ (рис. 4,*а*, 5,*а*)).

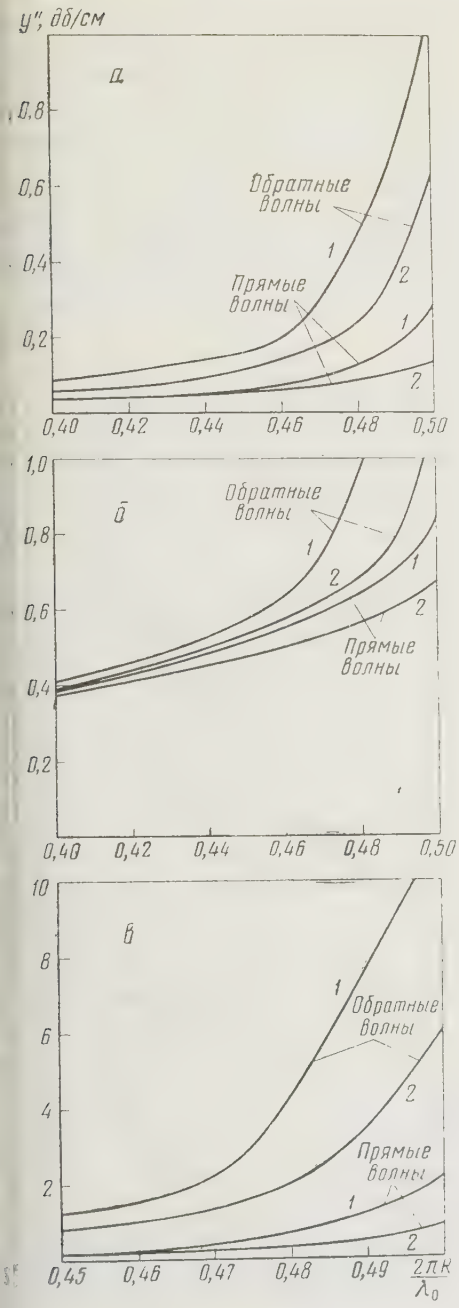


Рис. 2

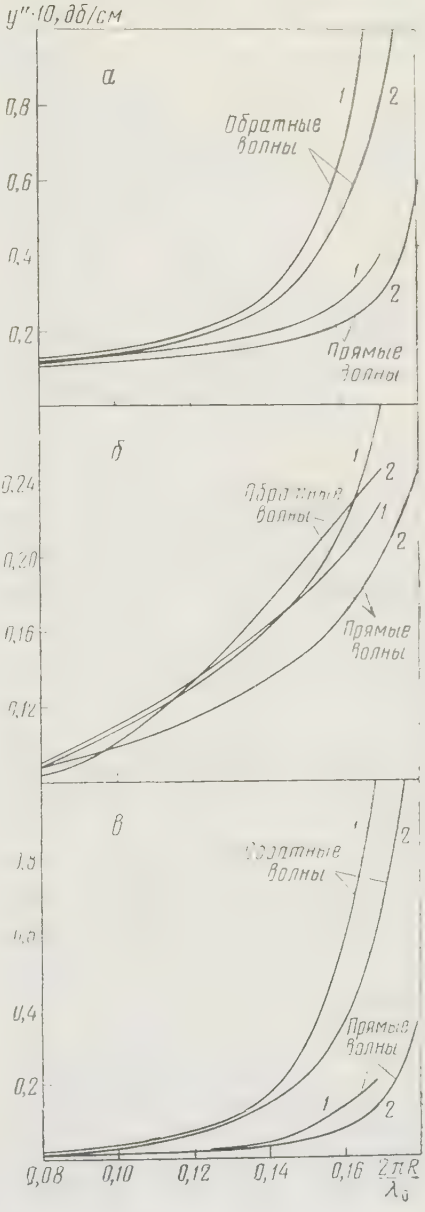


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость затухания системы спираль — феррит от параметра $2\pi R/\lambda_0$ для $\operatorname{tg}\Theta = 10$, $u = 0{,}52$; $\alpha = 10^{-3}$, $\varepsilon'' = 10^{-2}$ (*а*); $\alpha = 10^{-3}$, $\varepsilon'' = 10^{-1}$ (*б*); $\alpha = 10^{-2}$, $\varepsilon'' = 10^{-2}$ (*в*) и двух значений параметра v (*1* — $v = 0{,}52$; *2* — $v = 0{,}19$)

Рис. 3. Зависимость затухания системы спираль — феррит от параметра $2\pi R/\lambda_0$ для $\operatorname{tg}\Theta = 10$, $v = 0{,}19$ (остальные параметры те же, что и на рис. 2, *а*, *б*, *в*)

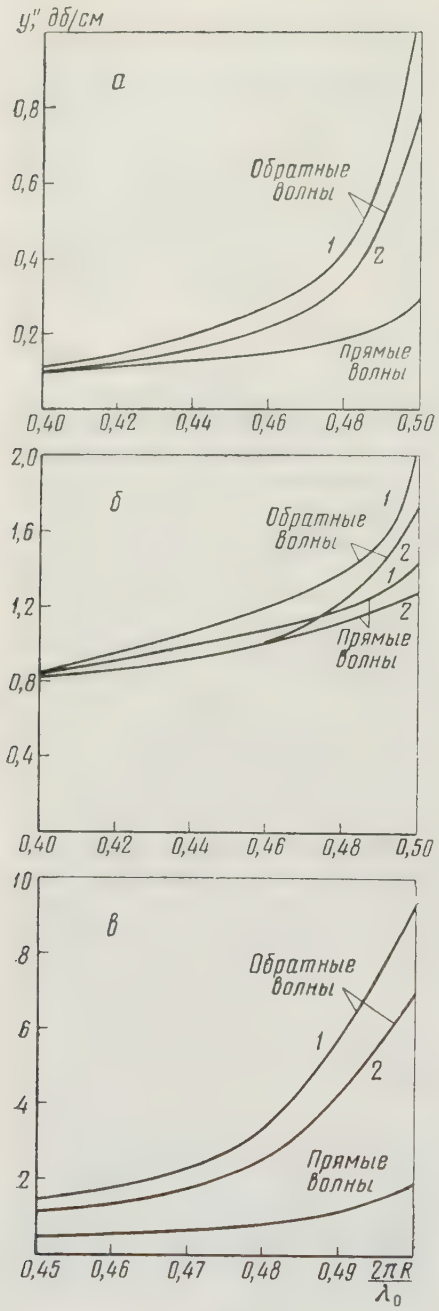


Рис. 4

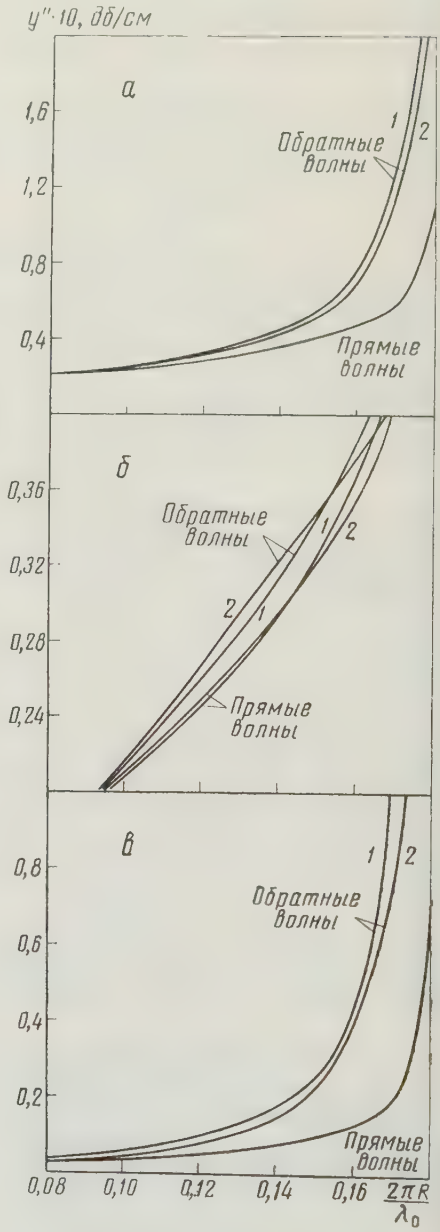


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость затухания системы спираль — феррит от параметра $2\pi R / \lambda_0$ для $\operatorname{ctg}\Theta = 20$ (остальные параметры те же, что и на рис. 2, *а*, *б*, *в*)

Рис. 5. Зависимость затухания системы спираль — феррит от параметра $2\pi R / \lambda_0$ для $\operatorname{ctg}\Theta = 20$ (остальные параметры те же, что и на рис. 2, *а*, *б*, *в*)

4. Если диэлектрические потери велики, то возможно наличие таких диапазонов частот, где затухание в обратном направлении ниже, чем в прямом (например, при $\operatorname{ctg}\Theta = 20$, $\alpha = 10^{-2}$, $\varepsilon'' = 10^{-1}$ затухание обратной волны ниже, чем прямой вплоть до $x/u = 0{,}79$ (рис. 5, *б*)). Это является прямым следствием формулы (34), из которой следует, что диэлектрические потери для прямых волн выше, чем для обратных.

Таким образом, стремясь обеспечить наибольший коэффициент направленности (например, при конструировании вентиля для лампы бегущей волны), необходимо брать феррит, обладающий возможно меньшими диэлектрическими потерями. Это, конечно, целесообразно и с точки зрения уменьшения абсолютной величины ослабления.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Sensiper, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 2, **149** (русск. перев. см. Вопр. радиолокационной техники, ИЛ, 1955, 5(29)).
2. J. A. Rich, S. E. Weber, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 1, 100.
3. Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, Л. А. Шишкин, И. П. Якименко, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 11, 1818.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Sow. Phys., 1935, 8, 153.
5. В. П. Шестопалов, К. П. Яцук, И. П. Якименко, ЖТФ, 1959, 29, 11, 1330.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Поступила в редакцию
15 II 1960

1961 № 1

КОАКСИАЛЬНАЯ ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА ИЗ ДВУХ СПИРАЛЕЙ СО ВСТРЕЧНОЙ НАМОТКОЙ, ЗАПОЛНЕННАЯ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

В. П. Шестопалов, А. А. Булгаков

Получено и исследовано дисперсионное уравнение коаксиальной двойной спирали со встречной намоткой, помещенной в магнитодиэлектрическую среду, для случая симметричного расположения спиралей. Определено влияние магнитодиэлектрика на величины запасенной мощности и полного сопротивления системы. Экспериментально исследованы дисперсионные свойства системы.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] вариационным методом исследованы свойства двойной спирали со встречной намоткой, находящейся в свободном пространстве. Такая замедляющая система обладает рядом преимуществ по сравнению с обычной спиралью, особенно в лампах бегущей волны — усилителях мощности. Действительно, у обычной спирали при высоких напряжениях полное сопротивление для электронного взаимодействия понижается, а некоторые гармоники поля (—1-я) при этом приобретают настолько высокое полное сопротивление, что может возникнуть генерация на обратной гармонике. В двойной спирали со встречной намоткой, если спирали намотаны в противоположных направлениях, симметрия системы обеспечивает сосредоточение наибольшей части электрической энергии в основной гармонике, а наибольшей части магнитной энергии — в гармониках поля. Это приводит к более высокому полному сопротивлению для основной гармоники и понижению его значения для более высоких гармоник поля. Как показано в [1], при напряжении в 10 *кв* полное сопротивление основной гармоники двойной спирали со встречной намоткой примерно в 2 раза выше соответствующего сопротивления обычной спирали, а полное сопротивление —1-й гармоники двойной спирали в 20 раз меньше, чем у обычной спирали.

Наряду с положительными свойствами двойная спираль имеет и некоторые недостатки. Эта система является более дисперсионной, чем обыкновенная спираль, и поэтому не может применяться в очень широкой полосе частот при фиксированном напряжении.

В реальных устройствах бифилярная спираль применяется в качестве замедляющей системы только с использованием различных диэлектрических креплений. Это приводит к необходимости учета влияния диэлектрической среды на дисперсионные свойства системы. Возникает также задача исследования возможности положительного использования магнитодиэлектрической среды для улучшения как дисперсионных, так и других свойств двойной спирали.

В настоящей статье показано, что внесение магнитодиэлектрической среды в двойную спираль при наличии металлического волновода, в котором помещена вся система, при соответствующем расположении и выборе значений ε и μ магнитодиэлектрической среды обеспечивает наиболее приемлемую дисперсионную характеристику системы при высоком значении полного сопротивления основной гармоники поля и понижает величину полного сопротивления — 1-й гармоники поля. Наличие металлического кожуха в исследуемой системе позволяет (без источника) рассмотреть также быстрые волны, которые могут распространяться в системе.

1. ПОЛЯ И ТОКИ СИСТЕМЫ

Пусть две спирали одинакового радиуса a (рис. 1) намотаны симметрично (угол намотки Θ). Период такой системы обозначим p; ширина ленты спиралей δ. Двойная спираль помещена в металлический кожух радиуса c. Внутри спирали находится магнитодиэлектрическая среда с диэлектрической ε_1 и магнитной μ_1 проницаемостями; между спиралью и волноводом — среда с ε_2, μ_2.

Если оси цилиндрической системы координат r, φ, z выбраны так, что z совпадает с осью двойной спирали, то исследуемая система остается неизменной при любом из следующих переходов:

$$(r, \varphi, z) \leftrightarrow (r, \varphi, -z);$$

$$(r, \varphi, z) \leftrightarrow (r, -\varphi, z);$$

$$(r, \varphi, z) \leftrightarrow (r, \varphi, z \pm p);$$

$$(r, \varphi, z) \leftrightarrow \left(r, \varphi \pm \frac{\pi}{2}, z + \frac{p}{2}\right).$$

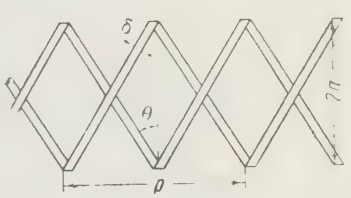


Рис. 1. Двойная спираль со встречной намоткой (симметричное расположение спиралей)

Последнее свойство характерно для двойных спиралей с одинаковым шагом.

Для двойной спирали решение волнового уравнения для продольных составляющих электрического E_z и магнитного H_z полей можно выбрать в форме

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{lm} R_{lm}(r) \exp\left\{i\left[\beta_{00} + \frac{2\pi}{p}(l + 2m)\right] z\right\} \exp(-il\varphi) \exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Функции $R_{lm}(r)$ определяются решением уравнения Бесселя в соответствующей области исследуемой системы.

Предполагая, что вдоль одной спирали (с правовинтовой намоткой — знак минус) течет ток

$$\vec{\mathcal{J}}(a^-) = \vec{e}_\varphi \mathcal{J}_\varphi(a^-) + \vec{e}_z \mathcal{J}_z(a^-), \quad (2)$$

а вдоль другой (с левовинтовой намоткой — знак плюс) течет ток

$$\vec{\mathcal{J}}(a^+) = \vec{e}_\varphi \mathcal{J}_\varphi(a^+) + \vec{e}_z \mathcal{J}_z(a^+), \quad (3)$$

и используя граничные условия на спирали (при $r = a$)

$$E_{1z} = E_{2z};\ E_{1\varphi} = E_{2\varphi};\ H_{1z} - H_{2z} = \mathcal{J}_\varphi(a^-) + \mathcal{J}_\varphi(a^+) = \mathcal{J}_\varphi;$$
$$H_{2\varphi} - H_{1\varphi} = \mathcal{J}_z(a^-) + \mathcal{J}_z(a^+) = \mathcal{J}_z, \quad (4)$$

а также граничные условия на идеально проводящем кожухе, получим следующие выражения для составляющих Фурье продольных напряженностей поля внутри и вне спиралей:

$$(E_{1z})_{lm} = -i \frac{\gamma_{lm} a}{k_1 a} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \left[\mathcal{J}_{zlm} - \frac{\beta_{lm} a l}{(\gamma_{lm} a)^2} \mathcal{J}_{\varphi lm}\right] \frac{I_l(\gamma_{lm} r)}{I_l'(\gamma_{lm} a)} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}; \quad (5)$$

$$(H_{1z})_{lm} = \mathcal{J}_{\varphi lm} \frac{I_l(\gamma_{lm} r)}{I_l(\gamma_{lm} a)} \frac{1}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\Delta_3}{\Delta_4}}; \quad (6)$$

$$(E_{2z})_{lm} = -i \frac{\gamma_{lm} a}{k_1 a} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \left[\mathcal{J}_{zlm} - \frac{\beta_{lm} a l}{(\gamma_{lm} a)^2} \mathcal{J}_{\varphi lm}\right] \frac{I_l(\gamma_{lm} r)}{I_l'(\gamma_{lm} a)} \frac{\Delta_5}{\Delta_1} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}; \quad (7)$$

$$(H_{2z})_{lm} = \mathcal{J}_{\varphi lm}\frac{I_l(\gamma_{lm}r)}{I_l(\gamma_{lm}a)}\Delta_6\left(\frac{1}{\Delta_4}\frac{1}{1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\Delta_3}{\Delta_4}}-\frac{1}{\Delta_3}\right), \tag{8}$$

где

$$\gamma_{lm}^2 = \beta_{lm}^2 - k_0^2;\ \beta_{lm} = \beta_{00} + \frac{2\pi}{a}(l+2m);\ k_0 = \frac{\omega}{c};\ B_{00} = \frac{\omega}{v_{\Phi\,00}};\ k_1 = \frac{k_0}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}};$$

$$\mathcal{J}_{zlm} = \mathcal{J}_{zlm}(a^+) + \mathcal{J}_{zlm}(a^-);\ \mathcal{J}_{\varphi lm} = \mathcal{J}_{\varphi lm}(a^+) + \mathcal{J}_{\varphi lm}(a^-);$$

$$\Delta_1 = \frac{K_l}{I_l}(\gamma_{lm}c) - \frac{K_l}{I_l}(\gamma_{lm}a);\ \Delta_2 = \frac{K_l}{I_l}(\gamma_{lm}c) - \frac{K_l'}{I_l'}(\gamma_{lm}a); \tag{9}$$

$$\Delta_3 = \frac{K_l'}{I_l'}(\gamma_{lm}c) - \frac{K_l}{I_l}(\gamma_{lm}a);\ \Delta_4 = \frac{K_l'}{I_l'}(\gamma_{lm}c) - \frac{K_l'}{I_l'}(\gamma_{lm}a);$$

$$\Delta_5 = \frac{K_l}{I_l}(\gamma_{lm}c) - \frac{K_l}{I_l}(\gamma_{lm}r);\ \Delta_6 = \frac{K_l'}{I_l'}(\gamma_{lm}c) - \frac{K_l}{I_l}(\gamma_{lm}r).$$

В (5) — (8) уже учтено, что поперечные постоянные распространения в первой и второй областях имеют приблизительно одно и то же значение. Выражения $\frac{K_l}{I_l}(\gamma_{lm}c)$ следует рассматривать как $K_l(\gamma_{lm}c)/I_l(\gamma_{lm}c)$.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Для получения дисперсионного уравнения применим вариационный метод, разработанный в [1] — [3]. Если воспользоваться выражением для лагранжиана данной задачи в форме

$$\dot{I} = \text{const}\sum_{l,\,m}\{(E_\varphi^*(a))_{lm}[\mathcal{J}_{\varphi lm}(a^-) + \mathcal{J}_{\varphi lm}(a^+)] +$$

$$+ (E_z^*(a))_{lm}[\mathcal{J}_{zlm}(a^-) + \mathcal{J}_{zlm}(a^+)]\}, \tag{10}$$

то решение задачи в случае одночленного приближения имеет вид

$$\dot{I}\{\mathcal{J}_{\parallel lm}(a^-)\} = 0, \tag{11}$$

где $\mathcal{J}_{\parallel lm}(a^-)$ — параллельная составляющая плотности поверхностного тока на правовинтовой спирали. Выберем $\mathcal{J}_{\parallel lm}(a^-)$ в виде

$$\mathcal{J}_{\parallel lm}(a^-) = A\frac{\delta}{2\pi a\,\mathrm{tg}\,\Theta}\frac{\sin\frac{l\delta}{2a\,\mathrm{tg}\,\Theta}}{\frac{l\delta}{2a\,\mathrm{tg}\,\Theta}}\delta(m);\qquad \delta(m) = \begin{cases}1, & m=0,\\ 0, & m\neq 0.\end{cases} \tag{12}$$

Используя (5) — (9), (11), (12), получим дисперсионное уравнение исследуемой системы

$$2Q_{00} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{l\delta}{2a\,\mathrm{tg}\,\Theta}}{\left(\frac{l\delta}{2a\,\mathrm{tg}\,\Theta}\right)^2}(Y_{l0} + Y_{-l0}) = 0, \tag{13}$$

где

$$Y_{lm} = \gamma_{lm}a\sin^2\Theta\frac{I_l}{I_l'}(\gamma_{lm}a)\frac{1}{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} - \sin 2\Theta\frac{l\beta_{lm}a}{\gamma_{lm}a}\frac{I_l}{I_l'}(\gamma_{lm}a)\frac{1}{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} +$$

$$+\cos^2\Theta\left\{\frac{(l\beta_{lm}a)^2}{(\gamma_{lm}a)^3}\frac{I_l}{I_l'}(\gamma_{lm}a)\frac{1}{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} - \frac{(k_1a)^2}{(\gamma_{lm}a)^2}\frac{I_l}{I_l'}(\gamma_{lm}a)\frac{1}{1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\Delta_3}{\Delta_4}}\right\};$$

$$Q_{00} = \gamma_{00} a \sin^2 \Theta \frac{I_0}{I_0'} (\gamma_{00} a) \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\Delta_{02}}{\Delta_{01}}}; \qquad (14)$$

$$\Delta_{01} = \frac{K_0}{I_0} (\gamma_{00} c) - \frac{K_0}{I_0} (\gamma_{00} a); \quad \Delta_{02} = \frac{K_0}{I_0} (\gamma_{00} c) - \frac{K_0'}{I_0'} (\gamma_{00} a),$$

остальные обозначения такие же, как и в (9).

3. ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (13)

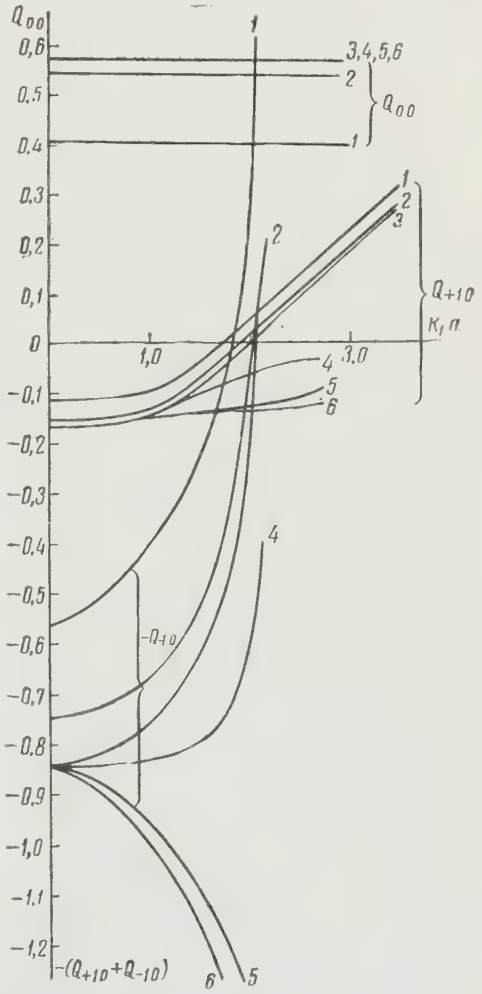
Анализ дисперсионного уравнения (13) проведем графическим способом. Для построения дисперсионных кривых перепишем (13) в виде

$$I_0 (\gamma_{00}) = - [Q_{-10} (\gamma_{-10}) + Q_{+10} (\gamma_{+10}) + \ldots + Q_{-n0} (\gamma_{-n0}) + Q_{+n0} (\gamma_{+n0})], \qquad (15)$$

$$Q_{l0} = \frac{\sin^2 \frac{l\delta}{2a \operatorname{tg} \Theta}}{\left(\frac{l\delta}{2a \operatorname{tg} \Theta}\right)^2} Y_{l0};$$

$$Q_{-l0} = \frac{\sin^2 \frac{l\delta}{2a \operatorname{tg} \Theta}}{\left(\frac{l\delta}{2a \operatorname{tg} \Theta}\right)^2} Y_{-l0}. \qquad (16)$$

лее строим по точкам кривые, ответствующие левой и правой тям (15). При этом $\beta_{00} a$ фиксируем, а изменяем величину $k_1 a = k_0 a / \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$. Точки пересечения этих ивых позволяют (при заданных и всех остальных параметрах стемы) определить $k_1 a$ в зависимости от $\beta_{00} a$. Таким образом жно построить графики изменения $k_0 a / \operatorname{ctg} \Theta$ в зависимости от $a / \operatorname{ctg} \Theta$.



. 2. Графическое решение уравнения (17):

3 — кривые Q_{00}, $-Q_{+10}$, $-Q_{-10}$ для $\mu_1=1$, 2; 6, 5; 10; *4*, *5*, *6* — кривые для $\varepsilon_1 = 10$; 2, 10; 20 ($\operatorname{ctg} \Theta = 5$, $\delta/p = 0{,}1$, $c/a = 3$ при $\beta_{00} a = 1{,}5$)

Как показывает расчет, для построения дисперсионных кривых в) достаточно выделить три члена, представив (15) в виде

$$Q_{00} = - (Q_{-10} + Q_{+10}). \qquad (17)$$

ки пересечения кривых левой и правой частей (17) находились следующим образом. Сначала строились, каждая в отдельности, кривые , Q_{-10}, Q_{+10}. Ход кривых показан на рис. 2. Для ряда значений $k_1 a$

графики Q_{00} представляют прямые, почти параллельные оси $k_1 a$. Кривые для $-Q_{+10}$ начинаются близко к нулю с отрицательных значений и плавно уходят на $+\infty$, проходя через $-Q_{+10}=0$. Поведение кривых $-Q_{-10}$ несколько отлично от Q_{00}, $-Q_{+10}$; $-Q_{-10}$ начинаются при отрицательных значениях, а затем, в зависимости от величин ε, μ, уходят в положительном или отрицательном направлении.

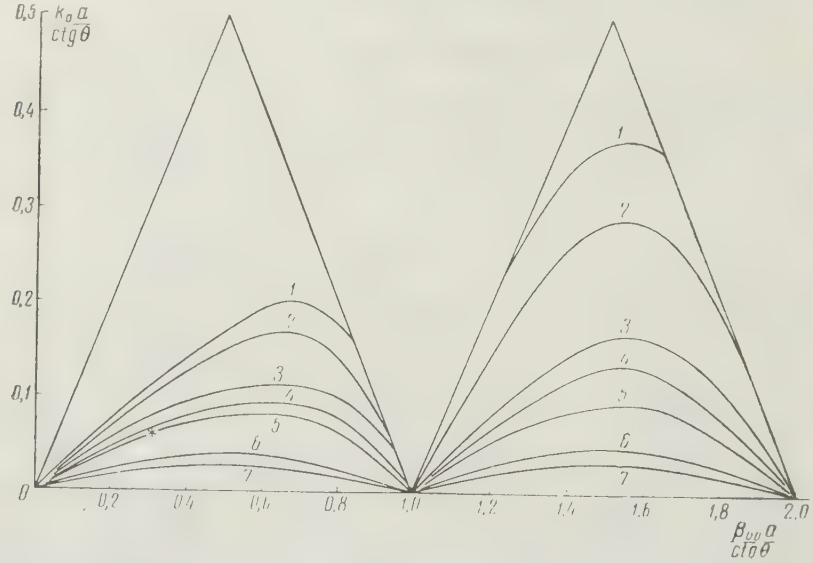


Рис. 3. Дисперсионные кривые медленных волн двойной спирали в магнитодиэлектрической среде при различных значениях ε_1, μ_1 ($\varepsilon_2=1$, $\mu_2=1$):

1, 2, 3, 4 — кривые для $\mu_1=\mu_2=1$, $\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_1=1$; 2; 6, 5; 10; *5, 6, 7* — кривые для $\mu_2=1$, $\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_1=10$, $\mu_1=2$; 10; 20

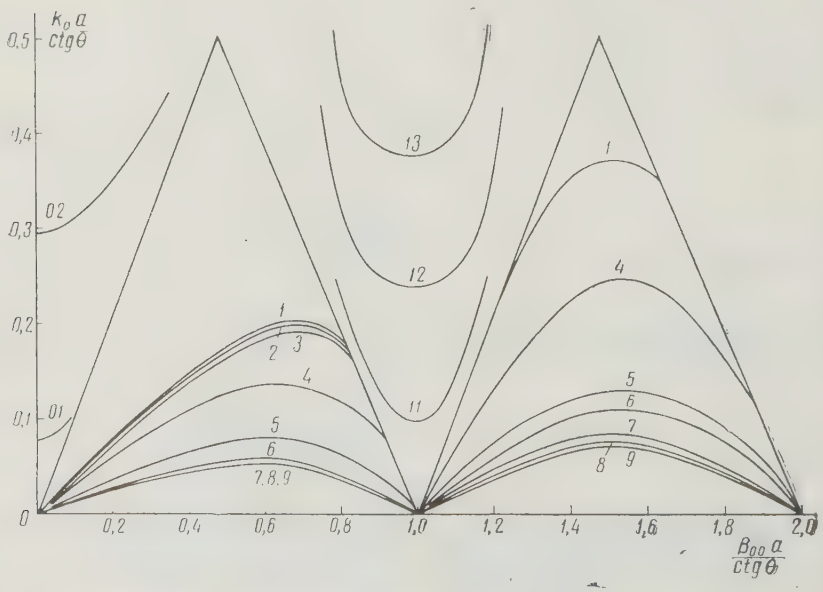


Рис. 4. Дисперсионные кривые медленных и быстрых волн двойной спирали в магнитодиэлектрической среде при различных значениях ε_2, μ_2, c/a ($\varepsilon_1=1$, $\mu_1=1$)

1, 4, 5, 6 — кривые для $\varepsilon_1=1$, $\mu_1=\mu_2=1$, $\varepsilon_2=1$; 2; 6, 5; 10; *7, 8, 9* — кривые для $\varepsilon_1=1$, $\mu_1=1$, $\varepsilon_2=10$, $\mu_2=2$; 10; 20; *1, 2, 3* — кривые для различных значений $c/a=3$; 2; 1, 1; кривые *01, 02, 11, 12, 13* соответствуют случаю $\varepsilon_2/\varepsilon_1=1$, $\mu_2/\mu_1=1$, $\delta/p=0{,}1$, $\operatorname{ctg}\theta=5i$ $c/a=3$

Как видно из кривых рис. 3 и 4, дисперсионные свойства системы существенно зависят от величин ε_1, ε_2 (при заданном значении $\operatorname{ctg}\Theta = 5$; $p = 0{,}1$).

Исследовалась также дисперсия системы в зависимости от соотношения между диаметрами кожуха и спиралей. Графики рис. 4 показывают, что дисперсионные свойства системы меняются незначительно в зависимости от выбранных значений c/a.

Таким образом, используя магнитодиэлектрик и металлический кожух, можно управлять дисперсионными свойствами бифилярной спирали.

4. БЫСТРЫЕ ВОЛНЫ В ДВОЙНОЙ СПИРАЛИ СО ВСТРЕЧНОЙ НАМОТКОЙ, ПОМЕЩЕННОЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ КОЖУХ

Наличие металлического волновода, в который помещена двойная спираль, позволяет рассмотреть вопрос о распространении быстрых волн в такой системе, т. е. колебаний с $v_\Phi > c$. Поперечная постоянная распространения для таких волн γ_{lm} приобретает вид

$$\gamma_{lm} = iq_{lm}, \tag{18}$$

дисперсионное уравнение (13) запишется в следующем виде:

$$2P_{00} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \dfrac{l\delta}{2a \operatorname{tg}\Theta}}{\left(\dfrac{l\delta}{2a \operatorname{tg}\Theta}\right)^2} (P_{l0} + P_{-l0}) = 0, \tag{19}$$

где

$$P_{lm} = q_{lm} a \sin^2\Theta \frac{J_l}{J_l'}(q_{lm}a) \frac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\dfrac{\delta_2}{\delta_1}} + \sin 2\Theta \frac{lh_{lm}a}{q_{lm}a} \frac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\dfrac{\delta_2}{\delta_1}} +$$

$$+ \cos^2\Theta \left\{ \frac{(lh_{lm}a)^2}{(q_{lm}a)^2} \frac{J_l}{J_l'}(q_{lm}a) \frac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\dfrac{\delta_2}{\delta_1}} + \frac{(k_1 a)^2}{(q_{lm}a)^2} \frac{J_l'}{J_l}(q_{lm}a) \frac{1}{1 - \dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{\delta_3}{\delta_4}} \right\};$$

$$P_{00} = (q_{00}a) \sin^2\Theta \frac{J_0}{J_0'}(q_{00}a) \frac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\dfrac{\delta_{02}}{\delta_{01}}}; \quad (q_{lm}a)^2 = (k_1 a)^2 - (h_{lm}a)^2; \tag{20}$$

$$\delta_1 = \frac{N_l}{J_l'}(q_{lm}c) - \frac{N_l}{J_l}(q_{lm}a); \qquad \delta_2 = \frac{N_l}{J_l}(q_{lm}a) - \frac{N_l'}{J_l'}(q_{lm}a);$$

$$\delta_3 = \frac{N_l'}{J_l'}(q_{lm}c) - \frac{N_l}{J_l}(q_{lm}a);$$

$$\delta_4 = \frac{N_l'}{J_l'}(q_{lm}c) - \frac{N_l'}{J_l'}(q_{lm}a); \qquad \delta_{01} = \frac{N_0}{J_0}(q_{00}c) - \frac{N_0}{J_0}(q_{00}a);$$

$$\delta_{02} = \frac{N_0}{J_0}(q_{00}c) - \frac{N_0'}{J_0'}(q_{00}a).$$

Расчет дисперсионных кривых производился таким же способом, как и в случае медленных волн. Эти кривые проходили в областях, «запрещенных» для медленных волн. В связи с тем, что функции $J_l(x)$ и $N_l(x)$ при изменении аргумента могут обращаться в нуль, фиксированным значениям параметров системы, в отличие от случая медленных волн, может соответствовать ряд дисперсионных кривых.

5. ЗАПАСЕННАЯ ЭНЕРГИЯ И ПОЛНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ

Если обозначить через W_{00H_φ} энергию, запасенную основной составляющей магнитного поля, а через $W_{00E_z}+W_{00E_r}$ энергию, запасенную основной составляющей электрического поля, то при $\gamma_{00}a \gg 3$

$$\left(\frac{W_{00H_\varphi}}{W_{00E_z}+W_{00E_r}}\right)_{\gamma_{00}a\gg 3} \simeq \left(\frac{k_0 a}{\gamma_{00}a}\right)^2 \mu_1\varepsilon_2 \frac{3\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2+\pi^2\frac{\mu_2}{\mu_1}}{2\pi^2+4\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}};$$

$$\lim_{\gamma_{00}a\to\infty}\left(\frac{W_{00H_\varphi}}{W_{00E_z}+W_{00E_r}}\right)=0. \qquad (21)$$

Таким образом, энергия магнитного поля в исследуемой системе значительно меньше, чем энергия электрического поля. Этот факт находится в соответствии с выводом работы [1]. Однако наличие магнитодиэлектрика в

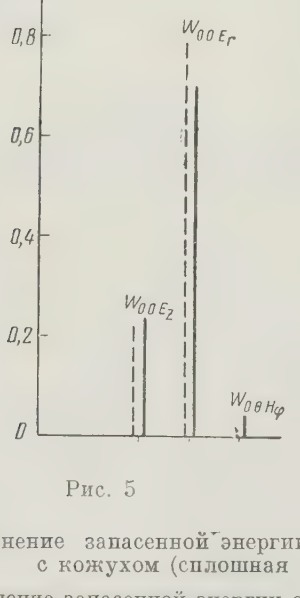


Рис. 5

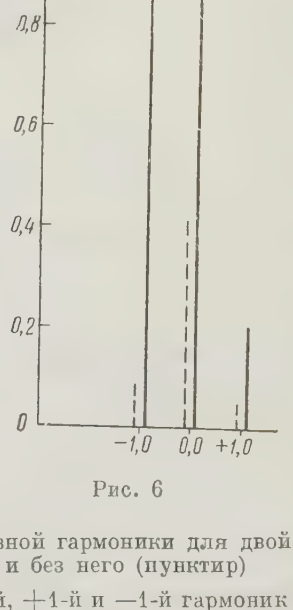


Рис. 6

Рис. 5. Сравнение запасенной энергии основной гармоники для двойной спирали с кожухом (сплошная линия) и без него (пунктир)

Рис. 6. Сравнение запасенной энергии основной, +1-й и —1-й гармоник для двойной спирали с кожухом (сплошная линия) и без него (пунктир)

системе, как видно из первой формулы (21), несколько ухудшает это соотношение. На рис. 5 приведены значения энергии z- и r-составляющих электрического поля, нормированные на полную энергию системы и нормированные на полную энергию значения энергии φ-й составляющей магнитного поля для бифилярной спирали в кожухе с магнитодиэлектриком и без него. Вычисления проделаны для точки на дисперсионной кривой 5 (рис. 3) со значениями $\beta_{00}a=1{,}5$; $k_0a=0{,}3$; $\operatorname{ctg}\Theta=5$; $\varepsilon_2=1$; $\mu_2=1$; $\varepsilon_1=10$; $\mu_1=2$ (эта точка обозначена на рис. 3 звездочкой). Для свободной бифилярной спирали параметры системы имели значения $\operatorname{ctg}\Theta=10$; $\beta_{00}a=1{,}5$; $k_0a=0{,}3$ (рис. 2 [1]). Были также сравнены запасенные энергии исследуемой системы и обычной бифилярной спирали для —1-й и +1-й гармоник. Из рис. 6 вид-

о, что магнитодиэлектрик увеличивает запасаемую энергию и перераспре-
ляет ее от +1-й к —1-й гармонике.

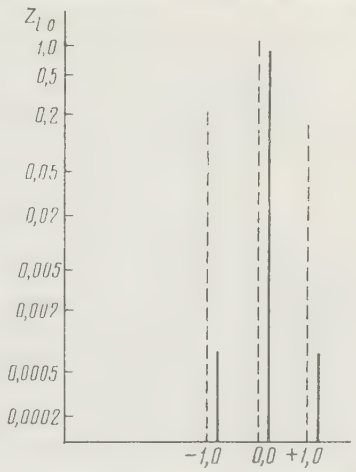
Полное сопротивление двойной спирали можно определить следующим
бразом:

$$Z_{00} = \frac{|E_{z00}|^2_{r=a}}{\beta_{00}^2 v_{\text{гр}} W_{00}}, \tag{22}$$

е $v_{\text{гр}} = d(k_0 a)/d(\beta_{00} a)$ — групповая скорость, которая вычисляется графиче-
ким дифференцированием по рис. 3. Для $l \neq 0$ E_{z00} зависит от φ и поэтому

$$Z_{l0} = \frac{1}{\beta_{l0}^2 v_{\text{гр}} W_{l0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |E_{zl0}|^2_{r=a} \, d\varphi. \tag{23}$$

езультаты вычислений полного сопротив-
ления приведены на рис. 7. Значения пара-
етров исследуемой системы и обычной би-
илярной спирали такие же, как и при вы-
числении запасенной энергии. Как видно из
ис. 7, наличие магнитодиэлектрика в систе-
е приводит к незначительному изменению



ис. 7. Сравнение полного сопротивления основ-
й, +1-й и—1-й гармоник для двойной спирали
кожухом (сплошная линия) и без него (пунктир)

олного сопротивления основной гармоники и резкому понижению полного
противления —1-й и +1-й гармоник. Такое уменьшение величин сопро-
вления объясняется возрастанием запасенной энергии этих гармоник.
го свойство коаксиальной бифилярной спиральной линии можно исполь-
вать в лампах бегущей волны для уничтожения генерации усилителя
—1-й гармонике.

6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ

Основные теоретические результаты работы были проверены эксперимен-
льно. Исследовались дисперсионные свойства двойной спирали, находя-
ейся в свободном пространстве, а также двойной спирали, намотанной
эбонитовом ($\varepsilon \simeq 2$) и фарфоровом ($\varepsilon \simeq 6{,}5$) стержнях (диаметры стержней

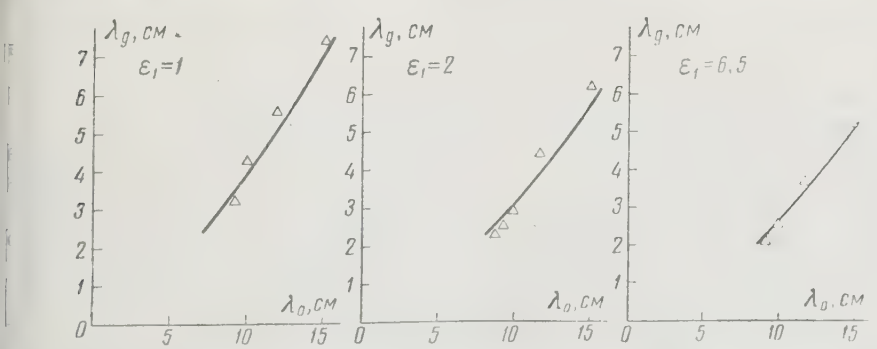


Рис. 8. Результаты экспериментальных измерений (треугольники) дисперсии для двойной спирали, находящейся в свободном пространстве ($\varepsilon_1=1$) или намотанной на эбонитовый ($\varepsilon_1 = 2$) и фарфоровый ($\varepsilon_1 = 6{,}5$) стержни

$2a = 10$ *мм*). Две спирали из медной ленты толщиной 0,1 *мм* и ширино $b \simeq 0{,}6$ *мм* навивались навстречу друг другу с $\operatorname{ctg}\Theta = 5$ ($p = 6$ *мм*). Двой ная спираль без диэлектрика состояла из двух спиралей из медной проволо ки диаметром 0,6 *мм* ($2a = 10$ *мм*; $p = 6$ *мм*; $\operatorname{ctg}\Theta = 5$). Измерения произ водились на установке, описанной в [4, 5]. Результаты измерений и сравне ние с теоретическими кривыми приве дены на рис. 8. Точки, по которы построена сплошная кривая на рис. 8 взяты из рис. 3 (кривые *1*, *2*, *3*). При этом связь между λ_0, λ_g и k_0, β_{00} оп ределяется формулами

$$\lambda_0 = \frac{2\pi a}{k_0 a}; \quad \lambda_g = \frac{2\pi a}{\beta_{00} a}. \qquad (24$$

	λ_0, *см*	15	12	10	8,6
$\varepsilon_1 = 2$	λ_g, *см* (в кожухе)	6,05	4,30	2,83	2,00
	λ_g, *см* (без кожуха)	6,25	4,37	2,88	2,09
$\varepsilon_1 = 6{,}5$	λ_g, *см* (в кожухе)	5,09	3,50	2,38	1,81
	λ_g, *см* (без кожуха)	5,11	3,54	2,41	1,82

Ряд измерений производился в мед ном кожухе диаметром $c = 30$ *мм*. Так как диаметры спиралей $2a =$ $= 10$ *мм*, то $c/a = 3$ и влияние кожух на дисперсию системы, как это показано выше (рис. 4, кривые *1*, *2*, *3*), должно быть незначительным, что и подтвердили проведенные измерения. В таблице приведены результаты этих измерений.

Отметим, что как при теоретическом, так и при экспериментальном ис следовании коаксиальной спирали в магнитодиэлектрике не учитывались изменения в поверхностных токах за счет пересечения спиралей. Для тонких лент такое приближение, как показал анализ, вполне оправдано.

Авторы выражают благодарность С. В. Троицкому за помощь, оказанную при расчете дисперсионных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Chodorow, E. I. Chu, J. Appl. Phys., 1955, 26, 1, 33.
2. S. Sensiper, Proc. I. R. E., 1955, 43, 2, 149.
3. L. Stark, J. Appl. Phys., 1954, 25, 9, 1155.
4. В. П. Шестопалов, К. П. Яцук, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 547.
5. В. П. Шестопалов, К. П. Яцук, ЖТФ, 1959, 29, 7, 819.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Поступила в редакцию 2 IV 1960

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ МАЛОЙ ГИРОТРОПНОЙ СФЕРЫ. Ч. II. МЕТОД РЯДОВ

Сюй Янь-шэн

Изложен приближенный метод решения задачи о колебаниях гиротропной сферы — метод рядов. Установлены правила взаимной связи между колебаниями различных типов. Показана возможность косвенного возбуждения колебаний Уокера при помощи электрического потенциала Дебая. Косвенное возбуждение, в частности, имеет место при помещении ферритового шарика в узел магнитного поля в прямоугольном волноводе.

1. РЕШЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАЛОЙ ГИРОТРОПНОЙ СФЕРЫ МЕТОДОМ РЯДОВ

В предыдущей работе [1] показано, что методом последовательных приближений можно получить решения электромагнитной задачи до нужной степени точности. Однако этот метод не дает общего представления о правилах трансформации типов волн. Поэтому целесообразно рассмотреть другой метод, обладающий большей физической наглядностью.

В сферических координатах уравнения Максвелла для намагниченных ферритов имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}H_\theta &= ik_0\varepsilon r\sin\theta E_r,\\
\frac{\partial}{\partial\varphi}H_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta H_\varphi) &= ik_0\varepsilon r\sin\theta E_\theta,\\
\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}H_r &= ik_0\varepsilon r E_\varphi,\\
\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}E_\theta &= -ik_0 r\sin\theta\,[(\mu\sin^2\theta+\cos^2\theta)H_r +\\
&\quad +(\mu-1)\sin\theta\cos\theta H_\theta - ikH_\varphi\sin\theta],\\
\frac{\partial}{\partial\varphi}E_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta E_\varphi) &= -ik_0 r\sin\theta\,[(\mu-1)\sin\theta\cos\theta H_r +\\
&\quad +(\mu\cos^2\theta+\sin^2\theta)H_\theta - ikH_\varphi\cos\theta],\\
\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}E_r &= -ik_0 r\,[\mu H_\varphi + ik(H_r\sin\theta + H_\theta\cos\theta)].
\end{aligned} \tag{1}$$

Сравнивая систему уравнений (1) с уравнениями Максвелла для изотропной среды и их решениями (выраженными через потенциалы Дебая с индексами n и m), нетрудно убедиться в том, что зависимость решений уравнений (1) от φ можно выразить через $e^{\pm im\varphi}$, причем связь между колебаниями с разными индексами m отсутствует. Это следует из того, что в уравнениях (1) имеет место только дифференцирование по φ, которое не дает новой зависимости от φ. Гиротропность среды характеризуется исключительно зависимостью от θ правой части трех последних уравнений (1). Следовательно, в решение входят суммы присоединенных полиномов Лежандра от $\cos\theta$ с разными индексами. Что касается зависимости от r, то из решений методом последовательных приближений [1] видно, что ее можно выразить через степенные ряды с четными или нечетными степенями ($k_0 r$). Кроме того, присоединенные полиномы Лежандра с большими индексами появляются толь

ко после большого числа последовательных приближений, и, следовательно, множители при них имеют более высокие степени ($k_0 r$).

Из вышесказанного следует, что составляющие полей колебаний типа квази-H (n, $\pm m$) можно выразить следующим образом:

$$E_r = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q} P^m_{n+2p+1}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p'=1}^{N}\sum_{q=0}^{\infty} A_{p',q}(k_0 r)^{n+2q} P^m_{n-2p'+1}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi},$$

$$E_\theta = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} B_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q}\frac{\partial}{\partial\theta} P^m_{n+2p+1}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p'=1}^{N}\sum_{q=0}^{\infty} B_{p',q}(k_0 r)^{n+2q}\frac{\partial}{\partial\theta} P^m_{n-2p'+1}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} F_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q}\frac{P^m_{n+2p}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p'=1}^{N'}\sum_{q=0}^{\infty} F_{p',q}(k_0 r)^{n+2q}\frac{P^m_{n-2p'}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} e^{\pm im\varphi},$$

$$E_\varphi = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} B_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q}\frac{P^m_{n+2p+1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p'=1}^{N}\sum_{q=0}^{\infty} B_{p',q}(k_0 r)^{n+2q}\frac{P^m_{n-2p'+1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} e^{\pm im\varphi} - \\ - \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} F_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q}\frac{\partial}{\partial\theta} P^m_{n+2p}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} - \\ - \sum_{p'=1}^{N'}\sum_{q=0}^{\infty} F_{p',q}(k_0 r)^{n+2q}\frac{\partial}{\partial\theta} P^m_{n-2p'}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi},$$

$$H_r = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} C_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q-1} P^m_{n+2p}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p'=1}^{N'}\sum_{q=0}^{\infty} C_{p',q}(k_0 r)^{n+2q-1} P^m_{n-2p'}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi}, \qquad (2)$$

$$H_\theta = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} D_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q-1}\frac{\partial}{\partial\theta} P^m_{n+2p}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p'=1}^{N'}\sum_{q=0}^{\infty} D_{p',q}(k_0 r)^{n+2q-1}\frac{\partial P^m_{n-2p'}(\cos\theta)}{\partial\theta} e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} G_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q+1}\frac{P^m_{n+2p+1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} e^{\pm im\varphi} + \\ + \sum_{p'=1}^{N}\sum_{q=0}^{\infty} G_{p',q}(k_0 r)^{n+2q+1}\frac{P^m_{n-2p'+1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} e^{\pm im\varphi},$$

$$H_\varphi = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} D_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q-1}\frac{P^m_{n+2p}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}e^{\pm im\varphi} +$$
$$+\sum_{p'=1}^{N'}\sum_{q=0}^{\infty} D_{p',q}(k_0 r)^{n+2q-1}\frac{P^m_{n-2p'}(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}e^{\pm im\varphi} -$$
$$-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} G_{p,q}(k_0 r)^{n+2p+2q+1}\frac{\partial}{\partial\theta}P^m_{n+2p-1}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi} -$$
$$-\sum_{p'=1}^{N}\sum_{q=0}^{\infty} G_{p',q}(k_0 r)^{n+2q+1}\frac{\partial}{\partial\theta}P^m_{n-2p'+1}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}.$$

десь $A_{p,q}$, $B_{p,q}$, $C_{p,q}$, $D_{p,q}$, $F_{p,q}$, $G_{p,q}$ — коэффициенты; один из них арактеризует амплитуду колебаний, а остальные определяются после дстановки рядов в уравнения (1);

при $(n-m)$ — четном $N = N' = \frac{n-m}{2}$,

при $(n-m)$ — нечетном $N = \frac{n-m+1}{2}$, $N' = \frac{n-m-1}{2}$.

Составляющие полей можно выразить и другим, более простым образом. днако для удобства наложения граничных условий мы придаем им вид, иболее похожий на выражения для составляющих полей в изотропной реде, написанные при помощи потенциалов Дебая.

Подставив ряды (2) в уравнения (1), приравняв коэффициенты при соответствующих членах обеих сторон, получим бесконечную систему уравнений с бесконечным числом неизвестных (т. е. коэффициентов в (2)). При этом адо использовать следующие известные формулы для присоединенных олиномов Лежандра:

$$\cos\theta P^m_n(\cos\theta) = \frac{1}{2n+1}[(n-m+1)P^m_{n+1}(\cos\theta) + (n+m)P^m_{n-1}(\cos\theta)],$$

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P^m_n(\cos\theta) = \frac{1}{2n+1}[n(n-m+1)P^m_{n+1}(\cos\theta) -$$
$$-(n+1)(n+m)P^m_{n-1}(\cos\theta)],$$

также формулы для $\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P^m_n(\cos\theta)$, $\cos^2\theta P^m_n(\cos\theta)$, $\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P^m_n(\cos\theta)\right]$, $\cos^3\theta P^m_n(\cos\theta)$ и $\cos^2\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P^m_n(\cos\theta)$; эти величины можно выразить через сумму полиномов $P^m_{n\pm3}(\cos\theta)$, $P^m_{n\pm2}(\cos\theta)$, $P^m_{n\pm1}(\cos\theta)$, $P^m_n(\cos\theta)$ с некоторыми коэффициентами. Бесконечную систему уравнений можно разбить на ряд систем с конечным и постепенно возрастающим числом неизвестных и решать их последовательно, а именно: сначала надо совместно решить уравнения, включающие неизвестные с индексами $q=0$, $p=0$ и всеми p', потом следует решить систему уравнений, включающих неизвестные с индексами $p=1$, $q=0$ $q=1$, $p=0$, p' — произвольными. Вообще говоря, надо совместно решать уравнения, содержащие в качестве неизвестных коэффициенты с индексами $p+q=s$ и $q=s$, p' — произвольными; здесь s — некоторая постоянная.

Таким методом можно вычислить все необходимые для заданной степени точности коэффициенты. Существование метода вычисления подтверждает правильность выражений (2), а следовательно, и справедливость вытекающего из них правила связи между типами колебаний, излагаемого ниже.

Аналогично можно выразить составляющие полей колебаний квази-E типа при помощи рядов и вычислить нужные коэффициенты. Подробно рассматривать этот вопрос мы не будем.

В случае малой сферы можно взять в выражениях (2) только члены с наинизшей степенью от $k_0 r$. Тогда колебания типов квази-H и квази-E переходят в колебания соответствующих уокеровских и аналогичных электростатических типов.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЛОЙ ГИРОТРОПНОЙ СФЕРЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ КОЛЕБАНИЙ

В предыдущей работе [1] было показано, что при наложении граничных условий электромагнитной задачи непрерывность касательных составляющих полей на поверхности сферы можно заменить непрерывностью соответственно подобранных потенциалов ψ_E и ψ_H и нормальными составляющими индукции B_r и D_r на поверхности сферы. Было показано также, что высшими членами в выражении (2) (т. е. членами с высшими степенями r, нежели у первых членов) обусловлены два явления: взаимная связь между колебаниями различных типов [2] и влияние эффекта распространения волн в феррите на резонансные условия. Взаимная связь между колебаниями различных типов состоит в том, что, вообще говоря, всегда одновременно возбуждаются следующие типы колебаний (со всеми значениями индексов p):

$$\begin{cases} \text{типы квази-}E & (|m|+2p,\ m), \\ \text{типы квази-}H & (|m|+2p+1,\ m), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \text{типы квази-}E & (|m|+2p+1,\ m), \\ \text{типы квази-}H & (|m|+2p,\ m), \end{cases}$$

где $p=0, 1, 2, \ldots$

Причина существования взаимной связи между колебаниями типов квази-E и квази-H более подробно объяснена в Приложении 1.

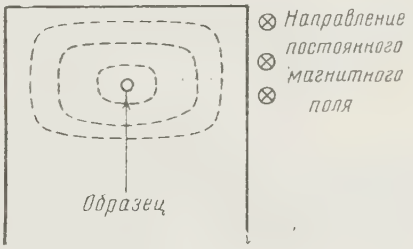
Резонансные условия определяются из требования безграничного или (в присутствии потерь) максимального возрастания амплитуд колебаний: они имеют место только для магнитного поля (и связанного с ним электрического поля). В случае малой сферы все высшие члены в (2) малы, и резонансные условия Уокера являются хорошими приближениями для соответствующих типов колебаний квази-H. Однако члены с высшими степенями r, зависимость которых от θ, φ одинакова с основным типом колебаний, все-таки дают небольшую поправку к резонансному условию. Этот вопрос подробно рассмотрен в [1].

Входящие в решение члены рядов с другими зависимостями от θ, φ устанавливают связь между различными типами и также, хотя и слабо, влияют на резонансную частоту или поле. Это следует из того, что хотя связь между различными типами взаимная (т. е. если первый тип влияет на второй, то второй, в свою очередь, влияет на первый), амплитуда колебания значительно возрастает только при резонансе, и обычно можно не учитывать обратного влияния на исходный тип такого типа, для которого не имеет места резонанс. Однако если условия резонанса обоих связанных типов близки друг к другу, то их амплитуды возрастают одновременно. Тогда уже нужно учесть оба влияния (прямое и обратное); в этом случае возникает явление взаимовлияния на резонансные условия между этими двумя типами, что впервые обнаружили Флетчер и Солт в экспериментальных исследованиях [2].

3. ВОЗБУЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЛОЙ ГИРОТРОПНОЙ СФЕРЫ ВОЛНОЙ H_{10} В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Задача возбуждения малой гиротропной сферы волной H_{10} в прямоугольном волноводе рассмотрена в работе [3]. Однако там учитывалось только решение нулевого приближения для колебаний в сфере; следовательно, полученные результаты можно уточнить, используя приближения высших порядков.

На практике нас интересует лишь амплитуда колебаний при резонансе. Как указано в [3], амплитуды падающей и отраженной волн различных типов колебаний быстро убывают с возрастанием индекса n. Из этого следует важный вывод: нужно учесть лишь влияние типов с меньшими индексами n на типы с бо́льшими n и влияние типа колебаний, имеющего резонанс, на другие близкие типы. Как показано выше, связь существует только между типами с одинаковыми индексами m. Следовательно, при вычислении амплитуд колебаний типов $(m, -m)$ (при резонансе для этих же типов) можно пренебречь влиянием прочих типов, и результаты для этих типов в [3] справедливы. Что касается колебаний других типов, то нужно ввести поправки, учитывающие влияния типов с меньшими индексами n. Например, для вычисления амплитуд отраженных волн $v^s(n, m)$ надо учесть влияние типов $\psi_H(n-2p-1, m)$ и $v(n-2p, m)$ со значениями индексов $p=0, 1, 2, \ldots$ В таких случаях прежде всего надо вычислить высшие приближения, определяющие взаимную связь между всеми типами $\psi_H(n-2p, m)$ и $\psi_E(n-2p-1, m)$. Затем нужно одновременно наложить граничные условия для всех этих типов с учетом взаимной связи между ними; тогда получим систему уравнений, решения которой дадут амплитуды отраженных волн и колебаний в феррите всех указанных типов.



Важно отметить, что вследствие связи между типами можно колебания типа квази-H возбуждать также при помощи поперечно-магнитной волны (характеризуемой потенциалом Дебая u) с подходящими индексами n и m. Примером является возбуждение колебаний типа $(2, 0)$ в волноводе в узле магнитного поля (см. рисунок), наблюдавшееся рядом авторов [4, 5, 6].

Между тем, разложение волны волновода H_{10} в данной точке не содержит потенциала Дебая $v(2, 0)$ [3]. В данном случае образец находится в пучности электрического поля, которое параллельно постоянному магнитному полю. Поэтому в нем возбуждаются колебания типа $\psi_E(1, 0)$, которые оказываются связанными с колебаниями типа $\psi_H(2, 0)$. При некоторой частоте колебания обоих типов имеют общий резонанс. Если постоянное магнитное поле наклонить под углом φ к стенке волновода, то одновременно возбудятся также колебания типа $\psi_E(1, -1)$ и связанные с ними колебания типа $\psi_H(2, -1)$. Подробнее эта задача для $\psi_E(1, 0)$ и $\psi_H(2, 0)$ рассмотрена в Приложении 2. Из полученного там выражения для амплитуды отраженной волны (характеризуемой потенциалом Дебая u^s) можно найти общую для обоих типов резонансную частоту, которая оказывается близкой к резонансной частоте колебаний типа $\psi_H(2, 0)$, вычисленной по Уокеру.

Отраженная поперечно-электрическая сферическая волна (характеризуемая потенциалом Дебая v^s) будет в данном случае создавать в волноводе лишь волны высших типов (затухающие).

Выражаю глубокую благодарность А. А. Пистолькорсу за руководство работой и ряд ценных советов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Если предположить, что связь между колебаниями квази-E и квази-H отсутствует, то для колебаний типа квази-H составляющие электрического поля принимают вид

$$E_r = 0, \quad E_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi, \quad E_\varphi = -\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi. \tag{I}$$

Здесь Φ — некоторая функция от r, θ, φ.

Подставив выражения (I) в последние два уравнения (1), получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right) = -ik_0 r\sin\theta\,[(\mu-1)\sin\theta\cos\theta\,H_r + (\mu\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,H_\theta - ik\cos\theta H_\varphi], \tag{II}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi\right) = -ik_0 r\sin\theta\,[\mu H_\varphi + ik\,(H_r\sin\theta + H_\theta\cos\theta)]. \tag{III}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}[(\mu-1)\sin\theta\cos\theta\,H_r + (\mu\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,H_\theta - ikH_\varphi\cos\theta] - \frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\,[\mu H_\varphi + ik\,(H_r\sin\theta + H_\theta\cos\theta)] = 0. \tag{IV}$$

В случае изотропной среды ($\mu = \mu_z = 1$, $k = 0$) это уравнение переходит в первое из системы уравнений (1).

Из равенства $E_r = 0$ следует

$$H_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\psi, \quad H_\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi. \tag{V}$$

Подставив (I), (V) в (IV) и остальные уравнения системы (1), исключив H_r, получим два уравнения для определения ψ и Φ:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(\mu-1)\sin\theta\cos\theta\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) + ik_0\varepsilon r\Phi\right\} + (\mu\cos^2\theta+\sin^2\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\psi - ik\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi\right] - \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi + ik\sin^2\theta\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) + ik_0\varepsilon r\Phi\right\} + ik\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right] = 0, \tag{VI}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right)\right] - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\Phi}{\sin\theta}\right) = -ik_0 r\sin\theta\left[(\mu\sin^2\theta+\cos^2\theta)\times\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) + ik_0\varepsilon r\Phi\right\} + (\mu-1)\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi - ik\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi\right]. \tag{VII}$$

Кроме того, ψ и Φ должны удовлетворять еще условию, вытекающему из уравнения (III):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi\right) = -ik_0 r\sin\theta\left[\frac{\mu}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi + ik\sin\theta\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) + ik_0\varepsilon r\Phi\right\} + ik\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right]. \tag{VIII}$$

При наличии трех уравнений (VI) — (VIII) для двух неизвестных ψ и Φ задача может быть решена только за счет введения полей, соответствующих потенциалу Φ_E. Следовательно, при выполнении граничных условий на поверхности сферы в качестве полей внутри сферы надо взять сумму типов колебаний квази-E и квази-H.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Предположим, что на гиротропную сферу падает волна с потенциалом $u_i(1, 0) = B_1 j_1(k_0 r)\cos\theta$. Нам нужно вычислить амплитуды колебаний типов $\psi_H(2, 0)$ и $\psi_E(1, 0)$ в феррите и отраженных волн $u^s(1, 0)$, $v^s(2, 0)$ при резонансе для типа $\psi_H(2, 0)$. Предположим, что

$$u^s(1, 0) = c_1 h_1^{(r)}(k_0 r)\,P_1(\cos\theta), \qquad v^s(2, 0) = c_2 h_2^{(r)}(k_0 r)\,P_2(\cos\theta)$$

и

$$\psi_E(1, 0) = A_1 r\cos\theta, \qquad \psi_H(2, 0) = \frac{A_2}{a}\left\{r^2\left(\frac{\sin^2\theta}{2} - \mu\cos^2\theta\right) - (1-\mu)\frac{a^2}{3}\right\}.$$

Методом последовательных приближений нетрудно определить, что с потенциалами $\psi_H(2, 0)$ и $\psi_E(1, 0)$ связаны следующие составляющие поля и индукции:

$$E_r(1, 0) = -\frac{k_0 A_2 k r^2}{5a}\cos\theta,$$

$$E_\theta(1, 0) = \frac{2k_0 A_2 k r^2}{5a}\sin\theta,$$

$$B_r(2, 0) = \frac{-\varepsilon(k_0 r) A_1 k}{2\mu+1} P_2(\cos\theta).$$

При выполнении граничных условий для $D_r(1, 0)$, $E_\theta(1, 0)$, $B_r(2, 0)$, $\psi_H(2, 0)$ поверхности сферы получим следующую систему уравнений:

$$\varepsilon\left[-\frac{k_0 A_2 k a^2}{5a}\cos\theta + A_1\cos\theta\right] = \frac{2c_1 h_1^{(2)}(k_0 a)\cos\theta}{a} + \frac{2B_1 j_1(k_0 a)\cos\theta}{a},$$

$$\left[\frac{2k_0 A_2 k}{5a}\, a^2\sin\theta - A_1\sin\theta\right] = \frac{1}{a}\, c_1\left[\frac{\partial(r h_1^{(2)}(k_0 r))}{\partial r}\right]_{r=a}(-\sin\theta) +$$

$$+\frac{B_1}{a}\left[\frac{\partial(r j_1(k_0 r))}{\partial r}\right]_{r=a}(-\sin\theta),$$

$$\left(-\frac{2}{3}a\right) A_2\left(\mu+\frac{1}{2}\right) P_2(\cos\theta) = c_2\left[\frac{\partial}{\partial r}\{r h_2^{(2)}(k_0 r)\}\right]_{r=a} P_2(\cos\theta),$$

$$-2\mu A_2 - \frac{\varepsilon(k_0 a) A_1 k}{2\mu+1} = c_2\,\frac{6h_2^{(r)}(k_0 a)}{a}.$$

итывая приближенные выражения $h_1^{(2)}(k_0 a)$, $h_2^{(2)}(k_0 a)$, $j_1(k_0 a)$ и $j_2(k_0 a)$ при малых $k_0 a$, нетрудно вычислить решение этих уравнений:

$$A_1 = \frac{2B_1 k_0}{\frac{(k_0 a)^2 \varepsilon k^2}{5(4\mu+1)(2\mu+1)}(\varepsilon+4)+\varepsilon+2}, \qquad A_2 = \frac{-\varepsilon(k_0 a) k A_1}{(4\mu+1)(2\mu+1)},$$

$$c_1 = \frac{iB_1(k_0 a)^3}{3}\left[1 - \frac{3\varepsilon\left(1+\frac{k^2(k_0 a)^2\varepsilon}{5(4\mu+1)(2\mu+1)}\right)}{(4+\varepsilon)\frac{(k_0 a)^2\varepsilon k^2}{5(4\mu+1)(2\mu+1)}+(\varepsilon+2)}\right].$$

вонанс имеет место при

$$\mathrm{Re}(4\mu+1) = -\left(\frac{\varepsilon+4}{\varepsilon+2}\right)\mathrm{Re}\left[\frac{k^2\varepsilon(k_0 a)^2}{5(2\mu+1)}\right] \ll 1.$$

случае малой сферы $k_0^2 a^2 \varepsilon \ll 1$ это условие мало отличается от резонансного условия Уокера для типа $\psi_H(2, 0)$:

$$\mathrm{Re}(4\mu+1) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

Сюй Янь-шэн, Некоторые методы решения задачи о колебаниях малой гиротропной сферы. Ч. I. Метод последовательных приближений, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 1951.

P. Fletcher, I. H. Solt, Coupling of the magnetostatic modes, J. Appl. Phys., 1959, Suppl. to **30**, 4, 181 s.

Сюй Янь-шэн, Дифракция электромагнитных волн на гиротропной сфере внутри прямоугольного волновода, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 15.

Я. А. Моносов, А. В. Вашковский, Ферромагнитный резонанс неоднородной прецессии в феррите, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 10, 1632.

J. F. Dillon, Magnetostatic modes in ferrimagnetic spheres, Phys. Rev., 1958, **112**, 1, 59.

P. Fletcher, I. H. Solt, R. Bell, Identification of the magnetostatic modes of ferrimagnetic resonant spheres, Phys Rev., 1959, **114**, 3, 739.

Поступила в редакцию
11 III 1960

1961 № 1

РЕЗОНАТОР ЛИНЕЙНОГО УСКОРИТЕЛЯ КАК НАГРУЗКА ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

А. П. Федотов, Б. К. Шембель

Рассмотрена эквивалентная схема резонатора линейного ускорителя с сильной нагрузкой пучком, учитывающая зависимость этой нагрузки от амплитуды и фазы поля. Эквивалентная схема позволяет рассчитывать входное сопротивление резонатора ускорителя. Приведены экспериментальные результаты работы модели ускорителя с сильной нагрузкой пучком.

ВВЕДЕНИЕ

В линейных ускорителях на стоячей волне, сильно нагруженных пучком ускоренных частиц [1, 2], последние воздействуют на амплитуду и фазу ускоряющего поля в резонаторе и на входное сопротивление его со стороны питающего высокочастотного генератора. С другой стороны, амплитуда и фаза ускоряющего поля, возбужденного генератором, определяют захват*

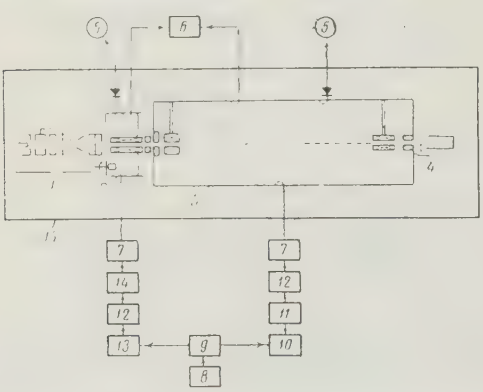


Рис. 1. Блок-схема модели ускорителя:

1 — электронный прожектор; *2* — группирователь; *3* — основной резонатор; *4* — анализатор спектра энергий; *5* — индикатор амплитуды поля; *6* — измеритель разности фаз; *7* — измерительная линия; *8* — возбудитель, тракт умножения частоты; *9* — мост деления мощности; *10* — промежуточный генератор; *11* — оконечный генератор; *12* — фазовращатель; *13* — вспомогательный генератор; *14* — ослабитель; *15*—вакуумный контейнер (стальная труба)

частиц в резонаторе и, следовательно, ток в пучке ускоренных частиц. Взаимозависимость генератора и резонатора становится сильной, и высказывались предположения, что при большой нагрузке пучком система генератор — ускоритель может оказаться неустойчивой.

Для расчета систем высокочастотного питания ускорителей с большой нагрузкой пучком надо знать входное сопротивление резонатора и его зависимость от режимов ускорения и генератора. На языке радиотехники это означает, что надо иметь электрическую схему, эквивалентную резонатору ускорителя, нагруженного пучком, знать величины ее параметров и их зависимости от указанных режимов.

В данной статье рассмотрена такая эквивалентная схема. Экспериментальная часть работы выполнена на электронной модели ускорителя, состоящей из однозазорного группирователя клистронного типа и основного резонатора (см. рис. 1 и Приложение 1). Модель отвечает двум основным требованиям: 1) мощность $P_{\text{п}}$, передаваемая полем основного

* Коэффициент захвата $\varkappa$ равен отношению тока ускоренных частиц на выходе резонатора к току на входе.

зонатора пучку, составляет существенную часть мощности $P_в$, вводи-ой в него, т. е. основной резонатор ускорителя имеет высокий кпд $= \frac{P_п}{P_в}$; 2) основной резонатор — «длинный», т. е. при ускорении в нем стицы совершают более периода фазовых колебаний.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

а) Измеряя спектр энергий частиц на выходе «длинного» ускорителя, ботающего без группирователя, А. Д. Гришина установила [3] нали-е в нем двух групп частиц: одна группа имеет энергии, близкие к ергии синхронной частицы (ускоренные частицы), вторая — близкие энергии инжекции (неускоренные стицы).

Следовательно, мощность $P_в$, вво-имая в резонатор, во-первых, идет создание ускоряющего поля в нем ощность $P_с$ потерь в стенках ре-онатора); во-вторых, передается уппе ускоренных частиц ($P_п$). аким образом, $P_в = P_п + P_с$ (не-скоренные частицы не влияют на аланс мощностей). Такой энерге-ический баланс был подтвержден сперимента льно на модели без груп-ирователя при больших нагруз-ах пучком (см. таблицу). Измерения оводились при различных синх-онных фазах $\varphi_с$ и одном и том же одном токе $I_{вх} = 1{,}2$ *ма*.

$\varphi_с^\circ$	$P_с$, *вт*	$P_п$, *вт*	$P_п + P_с$, *вт*	$P_в$, *вт*	$\eta = \frac{P_п}{P_п + P_с}$
20	1,06	1,38	2,44	2,52	0,57
25	1,13	2,1	3,23	3,11	0,65
30	1,25	2,65	3,9	4,41	0,68
35	1,4	2,93	4,33	4,78	0,68
40	1,6	3,26	4,86	5,7	0,67

Примечание. $P_в$, $P_с$ измерены при помощи измерительной линии ЛИ-4. Мощность $P_п$ рассчитана по измеренным величинам тока ускоренных частиц $I_п$ и их энергии ΔU, приобретенной в ускорителе ($P_п = I_п \Delta U$). Энергия синхронной частицы на выходе ускорителя 10,5 *кэв*.

Из таблицы видно, что $P_в = P_п + P_с$ с точностью погрешности измерений (погрешность измерений $P_в$ и $P_с$ 10—12%, погрешность измерений $P_п$ 3—5%).

б) Измерения на модели ускорителя без группирователя показали, что ри введении пучка, сильно нагружающего резонатор (в опытах η до 0,7), ртина распределения ускоряющего поля вдоль его оси (электрическая ина 2,3 λ) остается неизменной в пределах погрешности измерений (0,5%). ледовательно, в этих условиях пучок не вносит каких-либо нежелатель-их эффектов, связанных с нарушением структуры поля, которые следова-ло бы учесть в эквивалентной схеме.

в) При работе основного резонатора с группирователем при кпд первого 76 неустойчивость в работе системы генератор — ускоритель не наблю-алась.

2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА *

Нагрузку высокодобротного резонатора ускорителя пучком ускорен-ых частиц на эквивалентной схеме можно представить генератором инусоидального тока $I_п$, работающим как потребитель энергии и вклю-енным параллельно контуру, эквивалентному резонатору (рис. 2, *а*)**. длинном резонаторе — ускорителе можно считать, что пучок в целом оздействует на ускоряющее поле так, как будто частицы каждого его устка стянуты к синхронной частице. Поскольку последняя опере-ает максимум напряжения в резонаторе $\overline{U}$ на угол $\varphi_с$, то на экви-алентной схеме ток $\overline{I}_п$ должен опережать $\overline{U}$ на тот же угол $\varphi_с$. Ампли-

* Схема не учитывает нагрузку резонатора ускорителя вторичными частицами.

** Высказано Б. К. Шембелем в 1953 г.

туда $I_п$ определяется из условия равенства мощностей: получаемой пучком в резонаторе ускорителя и в эквивалентной схеме:

$$I_0 \Delta U = \frac{1}{2} I_п U \cos \varphi_с. \quad (1)$$

Здесь I_0 — средний ток ускоренных частиц; ΔU — эквивалентная разность потенциалов, которую проходят ускоренные частицы в ускорителе; U — амплитуда напряжения в резонаторе и на контуре, эквивалентном резонатору. Но

$$\Delta U = \bar{\nu} U \cos \varphi_с, \quad (2)$$

где $\bar{\nu}$ — средняя эффективность зазоров ускорителя *. Выражения (1) и (2) дают

$$I_п = 2\bar{\nu} I_0. \quad (3)$$

Поскольку между $\bar{U}$ и $\bar{I}_п$ имеется разность фаз $\varphi_с$, то чисто активное входное сопротивление резонатора (со стороны генератора) при

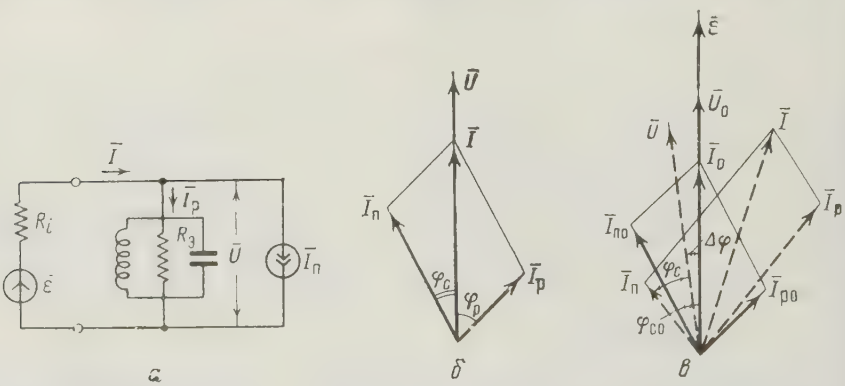


Рис. 2. Эквивалентная схема резонатора ускорителя, нагруженного пучком, и генератора. Векторные диаграммы

введенном пучке достигается расстройкой резонатора относительно частоты генератора. Фазовый угол этой расстройки можно определить из рис. 2, *б*:

$$\operatorname{tg} \varphi_р = \frac{I_п \sin \varphi_с}{I_р \cos \varphi_р} = \frac{\eta}{1 - \eta} \operatorname{tg} \varphi_с **. \quad (4)$$

Здесь

$$\eta = \frac{P_п}{P_п + P_с} = \frac{I_п \cos \varphi_с}{I_п \cos \varphi_с + I_р \cos \varphi_р}.$$

Если электронику питающего генератора представить пересчитанными в цепь резонатора параметрами $\bar{\mathcal{E}}$ и R_i (рис. 2, *а*), то окажется, что при выключении пучка фаза напряжения в резонаторе смещается на величину

$$\operatorname{ctg} \Delta\varphi = \operatorname{ctg} \varphi_р \left(1 + \frac{R_э}{R_i} \frac{1}{\cos^2 \varphi_р}\right).$$

---

* Эффективность ускоряющего зазора ν — отношение разности потенциалов, которую проходит «максимальная» частица в зазоре, к амплитудному значению разности потенциалов на зазоре (максимальная частица — та, которая середину зазора проходит в момент максимума поля) [3].

** Формула другим путем получена Л. М. Прокуниным [3]. Для ускорителей на стоячей волне зависимость, связывающую изменение фазы ускоряющего поля с пучком частиц, впервые определил А. С. Компанеец [4].

ри $R_i \gg R_э$

$$\Delta\varphi \simeq \varphi_р. \tag{5}$$

На модели ускорителя без группирователя с генератором, работающим недонапряженном режиме ($R_i \gg R_э$), были измерены смещения фазы $\Delta\varphi$, исходившие при выключении пучка, при $\varphi_с = 35°$ и различных η. Изменения $\Delta\varphi$ проводились при помощи змерителя разности фаз [5] по сравнию фазы колебаний в резонаторе опорной фазой. Частота колебаний енератора подстраивалась так, чтобы одное сопротивление резонатора ило чисто активным, что контролировалось измерительной линией. Длина линии передачи анодный контур енератора — резонатор ускорителя риближенно кратна $\lambda/2$. Точки на с.3—экспериментальные. Расчетная ивая на рис. 3 построена по (4). Разброс экспериментальных точек можно ъяснить практической трудностью получения чисто активного входного противления. Хотя питающий генератор и не является идеальным генератором тока, экспериментальные точки легли довольно близко к расчетной ивой. Это позволяет говорить о справедливости формулы (4) и, следовательно, эквивалентной схемы.

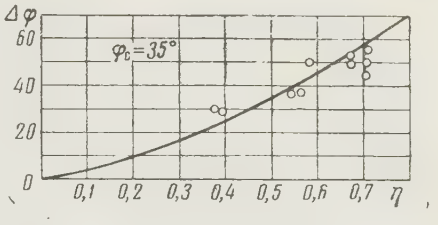


Рис. 3. Смещение фазы напряжения в резонаторе при выключении пучка

Зависимость $I_п(\bar{U})$ для двух случаев работы ускорителя дана в Приложении 2.

3. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ РЕЗОНАТОРА

При помощи эквивалентной схемы можно рассчитывать входное сопротивление резонатора ускорителя.

а) Входное сопротивление длинного резонатора ускорителя, нагруженного пучком (рис. 2, *а*),

$$\bar{Z}_{вх} = \frac{\bar{\varepsilon} - \bar{I}_п(\bar{U})\, R_i}{\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{Z}} + \bar{I}_п(\bar{U})}.$$

десь сопротивление ненагруженного резонатора $\bar{Z} = R_э + jx$. Величина исто активного входного сопротивления резонатора, вне зависимости величин параметров генератора и состояния частиц на входе в резонатор, равна

$$R_0 = R_э(1 - \eta), \tag{6}$$

ричем $x = R_э \operatorname{tg} \varphi_с \frac{\eta}{1-\eta}$. При выключении пучка модуль входного сопротивления становится равным

$$|\bar{Z}_{вх}| = R_0 \frac{1}{\sqrt{1 - 2\eta + \frac{\eta^2}{\cos^2 \varphi_с}}}.$$

ри $\varphi_с < 45°$ и любых η $R_0 < |\bar{Z}_{вх}|$.

б) Для расчета входного сопротивления резонатора в случае изменения тока пучка, амплитуды и фазы поля в резонаторе приходится итывать взаимозависимость этих параметров. Пусть длинный резонатор работает после аналогичного (случай 2 Приложения 2) и в исходном состоянии (на рис. 2, *в* векторы $\bar{U}_0$, $\bar{I}_{п0}$ — сплошные линии) $_{вх} = R_0$, $\eta = 0{,}5$, $\varphi_{с0} = 40°$, коэффициент захвата $\varkappa = 1$, причем $R_э/R_i = 5$. опустим, что ток пучка на входе данного резонатора изменился так, о напряжение в нем уменьшилось на 10% ($U/U_0 = 0{,}9$). Чтобы найти

ого изменение тока и новые величины φ_c, $\varkappa$, фазы напряжения $\Delta\varphi$, надо использовать зависимость $I_п(\bar{U})$ (случай 2 Приложения 2), что выполнено в Приложении 3. Найденные величины позволяют непосредственно вычислить входное сопротивление резонатора при измененном токе пучка.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Модель ускорителя

Основной цилиндрический резонатор, возбуждаемый на типе колебаний TM_{01}, выполнен из меди и имеет длину 1250 *мм*, диаметр 360 *мм*. В нем 17 трубок дрейфа с диаметром отверстий в них 12 *мм*. Трубки изолированы по постоянному току, что позволяет измерять ток отсева на них частиц и регистрировать электронно-резонансный пробой между ними. Длина волны $\lambda = 53{,}3$ *см*. Средняя по периоду ускорения (последний равен $\beta\lambda$, где β — скорость частицы, отнесенная к скорости света) напряженность электрического поля $\bar{E} = 80$ *в/см*. Добротность $Q_0 = 34\,400$. Эквивалентное резонансное сопротивление $R_э = 53{,}4 \cdot 10^6$ *ом*. Длина зазора 0,3 $\beta\lambda$. Расстройка 15% [6]. Эффективность зазоров ν изменяется от 0,71 для первого до 0,82 для последнего; $\Delta\beta/\beta$ на первом зазоре 7,1 %, на последнем зазоре 3,6%. Равномерность ускоряющего поля вдоль оси резонатора, равная ± 3 %, достигается изменением собственных частот концевых отсеков.

Группирователь—тороидальный резонатор ($Q_0 = 1500$, $R_э = 170 \cdot 10^3$ *ом*) с диаметром отверстия для пучка 8 *мм*. Длина группирующего зазора 12,8 *мм* (0,25 $\beta\lambda$); $\nu = 0{,}81$. Для облегчения фокусировки пучка электронов, которая при низкой энергии его в начале ускорителя является довольно трудной *, расстояние между серединой зазора группирователя и серединой первого зазора основного резонатора фиксировано и рассчитано из условия получения максимального захвата при учете объемного заряда [7] для следующих данных: напряжение инжекции 1800 *в*, ток пучка 1,7 *ма*, диаметр пучка 8 *мм*. Это расстояние равно 240 *мм* (соответствующий пролетный угол $\Theta = 33{,}7$ *радиан*).

Модернизированный осциллографический прожектор с ускоряющим электродом дает максимальный ток около 2 *ма* при ускоряющем напряжении 1800 ± 1,5 *в*.

Фокусировка пучка осуществляется продольным магнитным полем, напряженность которого равна примерно 40 *эрс*. Вакуум в стальной трубе поддерживается в пределах $(3—9) \cdot 10^{-6}$ *мм* рт. ст.

Возбудителем в системе высокочастотного питания служит термостатированный возбудитель плавного диапазона. Частота сигнала возбудителя 2,94 *Мгц* умножается в 192 раза. Промежуточный генератор в канале основного резонатора, вспомогательный генератор, ослабитель в канале группирователя служат для дополнительной развязки каналов, облегчающей проведение эксперимента.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Зависимость амплитуды тока $I_п$ от амплитуды и фазы напряжения в резонаторе **

В (3) ток $I_0 = I_{вх}\varkappa(\bar{U})$, где $I_{вх}$ — ток в пучке на входе рассматриваемого резонатора; $\varkappa$ — коэффициент захвата. Функция $\varkappa(\bar{U})$ для разных состояний частиц на входе резонатора будет различной. Рассмотрим ее для длинного резонатора ускорителя в двух характерных случаях: 1) когда в этот резонатор поступают частицы с выхода однозазорного группирователя, 2) с выхода подобного ему длинного резонатора, предполагая, что скорость частиц в зазорах резонатора изменяется незначительно и что объемный заряд отсутствует.

Случай 1. Область устойчивости в фазовой плоскости ускорителя или область фаз φ и скоростей $y = (\beta - \beta_0)/\beta_0$ (β_0 — скорость синхронной частицы), при которых частицы захватываются в режим синхронного ускорения, ограничивается сепаратрисой***

$$\frac{2\pi\Theta_{фу}}{\sin\varphi_c - \varphi_c\cos\varphi_c}\, y_m^2 = 4 - 3\left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right)^2 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_c}\right)^3. \qquad (7)$$

Здесь y_m — скорость максимальной частицы; $\Theta_{фу} = 2U/\nu U_з$ — пролетный угол до фокуса зазора ускорителя (U — разность потенциалов, которую прошли частицы; $U_з$ — высокочастотное напряжение на зазоре). На рис. 4 кривая C — сепаратриса основного

* Влияние паразитных магнитных полей (в том числе поля Земли) на траекторию пучка было значительно ослаблено принятыми мерами, предложенными В. А. Тепляковым: стальная труба, в которой размещена модель, снаружи обмотана слоем гиперсиловой ленты толщиной 0,2 *мм*; на основном резонаторе укреплен пермаллоевый экран толщиной 1 *мм*.

** Что касается фазы $\bar{I}_п$, то в длинном ускорителе $\bar{I}_п$ опережает $\bar{U}$ на угол φ_c (§ 2).

*** Выражения (7) и (8) взяты из работ В. А. Теплякова, например [3].

резонатора модели при $\varphi_c = 30°$ и $\Theta_{фу} = 19$ *радиан*. Состояние частиц на входе в основной резонатор после однозазорного группирователя в той же фазовой плоскости описывается следующим образом:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\Theta}{\Theta_{фг}} \sin \varphi_0; \qquad y = -\frac{\sin \varphi_0}{\Theta_{фг}}. \tag{8}$$

Здесь $\Theta_{фг}$ — пролетный угол до фокуса группирователя; φ_0 — начальная фаза частиц. На рис. 4 кривая Г построена по (8) для $\Theta = 33{,}7$ *радиан* и $\Theta_{фг} = 25{,}9$ *радиан*.

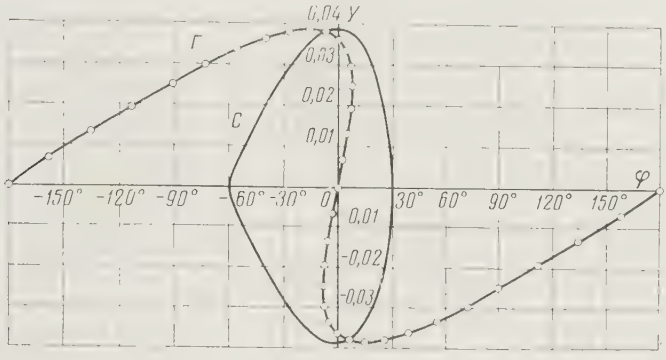


Рис. 4. Фазовая плоскость. *С*—сепаратриса, ограничивающая область устойчивости основного резонатора ($\varphi_c = 30°$, $\Theta_{фу} = 19$ *радиан*), Г — кривая состояния частиц на выходе группирователя (Θ=33,7 *радиан*, $\Theta_{фг} = 25{,}9$ *радиан*, $\varkappa = 0{,}45$)

в основном резонаторе с $\varphi_c = 30°$ и $\Theta_{фу} = 19$ *радиан* при заданном $\Theta = 33{,}7$ *радиан* максимальный коэффициент захвата $\varkappa = 0{,}45$ имеет место при $\Theta_{фг} = 25{,}9$ *радиан*) кружками на кривой Г отмечены частицы, начальные фазы которых отличались друг от друга на 10°; $\varkappa$ рассчитывается как отношение числа интервалов между кружками, ограниченных сепаратрисой, к полному числу интервалов, равному в данном случае 36.

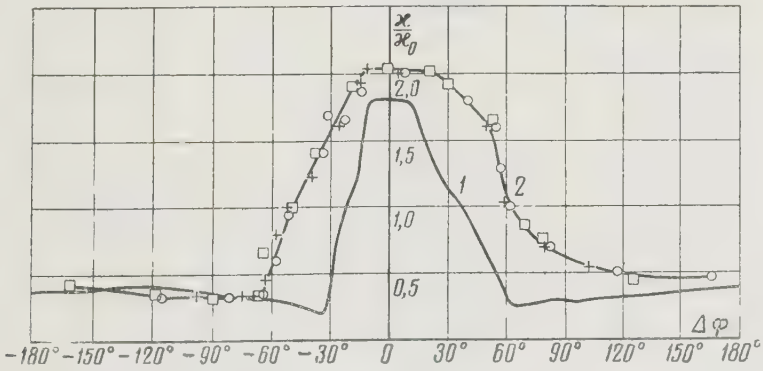


Рис. 5. Зависимость коэффициента захвата для основного резонатора, работающего после группирователя, от разности фаз колебаний группирователь—основной резонатор:

1 — расчетная кривая, $\varphi_c = 30°$, $\Theta = 33{,}7$ *радиан*, $\Theta_{фу} = 19$ *радиан*, $\Theta_{фг} = 25{,}9$ *радиан*; *2* — экспериментальная кривая

Изменению фазы колебаний в резонаторе при постоянной амплитуде их соответствует перемещение сепаратрисы *С* на рис. 4 относительно кривой Г вдоль оси φ. Зависимость $\varkappa$ от разности фаз колебаний группирователь — основной резонатор $\varkappa(\Delta\varphi)$ (кривая *1*), вычисленная таким путем для данных рис. 4, дана на рис. 5 ($\varkappa$ — коэффициент захвата при работе с группирователем; $\varkappa_0$ — коэффициент захвата без группирователя, который при $\varphi_c = 30°$ равен 0,25). На рис. 5 приведена экспери-

ментальная кривая 2, являющаяся результатом трех серий измерений. В этих измерениях амплитуда напряжения в группирователе была выбрана так, чтобы обеспечить максимальный $\varkappa$ в основном резонаторе при оптимальной разности фаз $\Delta\varphi_{опт}$. Экспериментальная кривая $\frac{\varkappa}{\varkappa_0}(\Delta\varphi)$ несколько шире расчетной. Возможно, это объясняется тем, что реальная область захвата в основном резонаторе модели, из-за заметного приращения скорости в его зазорах [8], больше области, описываемой формулой (7).

При расчете зависимости $\varkappa$ в основном резонаторе от амплитуды колебаний в нем при постоянной $\Delta\varphi$ каждый раз пересчитывается сепаратриса в основном резонаторе. При этом точка сепаратрисы, соответствующая максимальной частице, остается на одном и том же месте при изменении самой сепаратрисы.

Случай 2. Предположим, что частицы на выходе предыдущего резонатора равномерно распределены в фазовом пространстве, ограниченном сепаратрисой, одинаковой для обоих резонаторов. Зависимость $\varkappa$ в последующем резонаторе от амплитуды и фазы поля в нем можно найти, изменяя сепаратрису этого резонатора в соответствии с изменением амплитуды и передвигая ее относительно сепаратрисы предыдущего резонатора, характеризующей состояние частиц, в соответствии с изменением фазы и вычисляя площадь, общую для сепаратрис.

При постоянной разности фаз между резонаторами в рассматриваемом резонаторе $\varkappa$ остается равным единице при увеличении амплитуды U от исходного значения U_0, которому соответствует синхронная фаза φ_{c0}. Можно показать*, что при уменьшении в рассматриваемом резонаторе U от значения U_0 до значения $U_0\cos\varphi_{c0}$ зависимость $\varkappa(U)$ хорошо идеализируется прямой

$$\varkappa = \frac{\frac{U}{U_0} - \cos\varphi_{c0}}{1 - \cos\varphi_{c0}}. \tag{9}$$

Зависимости $\varkappa$ от разности фаз колебаний между резонаторами $\Delta\varphi$ для случаев увеличенной ($U > U_0$) и уменьшенной ($U < U_0$) амплитуд даны на рис. 6 (спадающие участки $\varkappa(\Delta\varphi)$ также идеализированы прямыми).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Из схемы рис. 2, *а* для двух значений $\bar{I}_{п0}$, $\bar{I}_{п}$ (которым соответствуют $\bar{U}_0$, $\bar{U}$) следует

$$\frac{\bar{I}_{п}}{\bar{I}_{п0}} = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_0} + \frac{1}{\bar{I}_{п0}}\frac{\bar{\varepsilon}}{R_i}\left(1 - \frac{\bar{U}}{\bar{U}_0}\right). \tag{10}$$

Все фазы отсчитываем от $\bar{\varepsilon}$. Поскольку $\eta = I_{п0}\cos\varphi_{c0}/I_0$ и $I_0 = \varepsilon/(R_i + R_0)$, то, учитывая (6) получим

$$I_{п0} = \frac{\eta}{\cos\varphi_{c0}}\frac{\varepsilon}{R_i + R_э(1-\eta)}. \tag{11}$$

После изменения тока пучка на входе резонатора (на рис. 2, *в* векторы показаны пунктиром)

$$\bar{U} = Ue^{j\Delta\varphi}. \tag{12}$$

Новый ток $\bar{I}_{п}$ опережает $\bar{U}$ на угол φ_c, определяемый U,

$$\bar{I}_{п} = I_{п}e^{j(\Delta\varphi+\varphi_c)}. \tag{13}$$

При этом

$$\varphi_c = \arccos\frac{\cos\varphi_{c0}}{U/U_0}. \tag{14}$$

В исходном же состоянии

$$\bar{I}_{п0} = I_{п0}e^{j\varphi_{c0}}. \tag{15}$$

* Указанным графическим методом или по отношению площадей сепаратрис $/\varepsilon_0 = \sqrt{(\varphi_c/\varphi_{c0})^5}$, что вытекает например, из [9].

Подставив (11), (12), (13), (15) в (10), получим

$$\frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{п0}}} = \frac{U}{U_0} e^{j(\varphi_{c0}-\varphi_c)} + \cos\varphi_{c0}\frac{1}{\eta}\left[1+\frac{R_{\text{в}}}{R_i}(1-\eta)\right]\left(1-\frac{U}{U_0}e^{j\Delta\varphi}\right)e^{-j(\Delta\varphi+\varphi_c)}. \quad (16)$$

Приравнивая нулю мнимую составляющую правой части (16), получим

$$\sin(\Delta\varphi+\varphi_c) = \frac{U}{U_0}\left[\sin\varphi_c + \frac{\sin(\varphi_{c0}-\varphi_c)}{\cos\varphi_{c0}}\frac{\eta}{1+\frac{R_{\text{в}}}{R_i}(1-\eta)}\right]. \quad (17)$$

Приравнивание действительных составляющих (16) дает

$$\frac{I_{\text{п}}^{\infty}}{I_{\text{п0}}} = \frac{U}{U_0}\cos(\varphi_{c0}-\varphi_c) + \cos\varphi_{c0}\frac{1}{\eta}\left[1+\frac{R_{\text{в}}}{R_i}(1-\eta)\right]\times$$

$$\times\left[\cos(\Delta\varphi+\varphi_c) - \frac{U}{U_0}\cos\varphi_c\right]. \quad (18)$$

Для решаемой задачи (14) дает $\varphi_c = 31°35'$; (17) дает $\Delta\varphi = -1°55'$; (18) дает $\frac{I_{\text{п}}^{\infty}}{I_{\text{п0}}} = 1{,}44$. Поскольку $-(\varphi_{c0}-\varphi_c) < \Delta\varphi < 2(\varphi_{c0}-\varphi_c)$ (рис. 6, *б*), коэффициент захвата определяется (9) и равен $\varkappa = 0{,}57$.

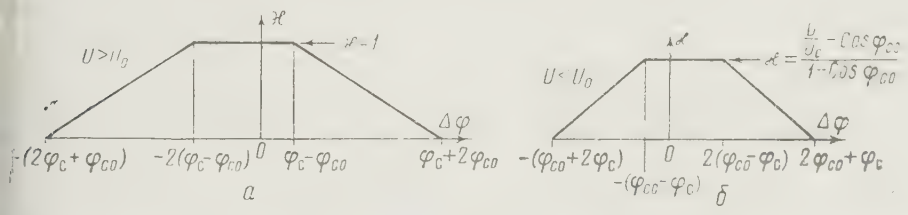


Рис. 6. Зависимость коэффициента захвата для резонатора ускорителя, работающего после аналогичного резонатора, от разности фаз колебаний в них

Обозначим отношение тока на входе в резонатор в новом состоянии к току на входе в исходном состоянии через k:

$$k = \frac{I_{\text{вх}}}{I_{\text{вх0}}} = \frac{I_{\text{вх}}}{I_{\text{вых 0}}}. \quad (19)$$

Тогда $\varkappa$ в новом состоянии (учитывая (3) и (19)) равно:

$$\varkappa = \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вых}}}{kI_{\text{вых 0}}} = \frac{\frac{I_{\text{п}}}{2\nu}}{k\frac{I_{\text{п0}}}{2\nu}} = \frac{1}{k}\frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{п0}}}.$$

Из последнего для решаемой задачи

$$k = \frac{1}{\varkappa}\frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{п0}}} = 2{,}5.$$

При таком увеличении тока на входе в резонатор напряжение в нем уменьшится на 60% и коэффициент захвата уменьшится от 1 до 0,57.

Экспериментальная часть работы выполнена совместно с Ю. К. Солодовым, Н. П. Поповым, Е. А. Сидоровым, В. Б. Степановым. В начальной стадии работы принимала участие А. Д. Гришина. Полезные советы дали В. А. Тепляков, Г. М. Анисимов. Всем перечисленным товарищам авторы выносят свою благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Семенов, И. Л. Зельманов, А. С. Компанеец, Б. М. Ст... панов, Б. К. Шембель, Некоторые проблемы, связанные с конструир... ванием сильноточных линейных ускорителей, Докл. на конференции по ускорит... лям высоких энергий, Женева, 1956.
2. E. O. Lawrence, Science, 1955, 122, 3180, 1127.
3. Б. К. Шембель, В. А. Тепляков, А. П. Федотов, Л. М. Пр... кунин, А. Д. Гришина, Вопросы расчета линейного ускорителя тяжелы... частиц, Докл. на конференции по ускорителям заряженных частиц, Москва, 195...
4. А. С. Компанеец, Изменение частоты резонатора от синхронной нагрузк... пучком, Отчет ИХФ АН СССР, 1952.
5. А. П. Федотов, Б. К. Шембель, Измерительная техника, 1955, 6, 4...
6. В. А. Тепляков, Б. К. Шембель, Радиотехника и электроника, 195... 1, 4, 443.
7. Клистроны, перев. с англ. под ред. Е. Д. Науменко, Изд. Советское радио, 195...
8. В. К. Мельников, Ю. С. Саясов, Теория захвата частиц в синхронны... режим ускорения с учетом неконсервативности уравнений движения, Объединен... ный институт ядерных исследований, Дубна, 1958.
9. В. А. Тепляков, Анализ работы сложных группирователей, Отчет ИХФ АН... СССР, 1959.

Поступила в редакцию
3 V 1960

61 № 1

ГАЗОРАЗРЯДНЫЙ ДЕТЕКТОР КОЛЕБАНИЙ СВЧ

Г. Д. Лобов

Изложен теоретический разбор одной из возможных гипотез работы газоразрядного детектора. На основании анализа дана оценка величины длительности переднего фронта импульса и определен коэффициент передачи газоразрядного детектора. Проведена экспериментальная проверка полученных теоретических результатов.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам воздействия электромагнитного поля сверхвысокой частоты газовый разряд и, в частности, детектированию при помощи газоразрядной трубки посвящено много работ. На основании анализа этих работ настоящему времени можно считать установленными следующие факты.

1. При наложении на газовый разряд поля СВЧ наряду с изменением постоянной составляющей разрядного тока [1—5] меняется коэффициент комбинации электронов с ионами [6, 7] и число столкновений электронов с частицами газа [8, 9].

2. При облучении различных частей газового разряда импульсно-модулированной мощностью СВЧ получающийся на нагрузочном сопротивлении импульс напряжения имеет различные величину, полярность и форму [4, 5]. Максимальная величина сигнала получается при облучении части разряда, лежащей между окончанием отрицательного свечения и началом положительного столба [4, 5].

3. Величина импульса напряжения меняется при изменении давления рода газа, размеров разрядного промежутка, приложенной мощности величины разрядного тока [1, 3, 4, 5].

Однако по опубликованным работам нельзя судить о предельных параметрах газоразрядного детектора, так как механизм детектирования рассмотрен во всех этих работах лишь качественно, причем разноречиво и не всегда в соответствии с опытными данными.

Настоящая работа посвящена теоретическому разбору одной из возможных гипотез работы газоразрядного детектора. В ее основе лежит тот факт, что при наложении поля СВЧ на газовый разряд изменяется энергия электронов. Изменение энергии электронов может привести к изменению некоторых параметров газового разряда, что в конечном счете скажется на величине постоянной составляющей разрядного тока через трубку. Можно предположить, что изменение энергии электронов скажется в большей мере там, где полная энергия электронов минимальна. Такой областью разряда является фарадеево темное пространство.

1. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНА В ГАЗОВОМ РАЗРЯДЕ

Приращение энергии, получаемое электроном при наложении поля СВЧ, находится при помощи уравнения баланса энергии электрона.

Как показано в [10], баланс энергии среднего электрона, пренебрегая распространением тепла, можно описать уравнением

$$\frac{dQ}{dt} = Q_{\text{пр}}^{(1)} - Q_{\text{тер}}^{(1)}, \qquad (1)$$

где $Q_{\text{пр}}^{(1)}$ и $Q_{\text{тер}}^{(1)}$ — энергия, приобретаемая и теряемая в секунду.

Для распадающейся плазмы обычно учитывается только энергия, по лучаемая электронами от поля ВЧ и равная [10, 11]

$$Q^{(1)}_{\text{пр}\sim} = \frac{e^2 |E_\sim|^2 \nu}{2m(\omega^2 + \nu^2)}.$$

При наличии постоянного электрического поля необходимо учитывать энергию, приобретаемую электроном от постоянного поля:

$$Q^{(1)}_{\text{пр}=} = \frac{e^2 E_=^2}{m\nu}.$$

Энергия, теряемая электроном при упругих и неупругих столкновениях, равна

$$Q^{(1)}_{\text{тер}} = \delta\nu_{\text{у}}(Q - Q_{\text{м}}).$$

Здесь

$$\delta = \delta_{\text{у}}\left(1 + \frac{\delta_{\text{ну}}\nu_{\text{ну}}}{\delta_{\text{у}}\nu_{\text{у}}}\right).$$

$Q - Q_{\text{м}}$ — разность энергии электрона и молекул; $\delta_{\text{у}}$, $\delta_{\text{ну}}$ — коэффициенты передачи энергии электрона частице газа при упругих и неупругих столкновениях.

Подставив значения $Q_{\text{пр}}$ и $Q_{\text{тер}}$ в (1) и заменив Q через $\frac{3}{2}kT$, получим

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2e^2E_=^2}{3km\nu} + \frac{e^2|E_\sim|^2\nu}{3km(\omega^2+\nu^2)} - \delta\nu_{\text{у}}(T - T_{\text{м}}).$$

Это выражение можно преобразовать, если считать, что до прихода импульса СВЧ $T = T_{\text{н}}$, а $\nu = \nu_{\text{н}}$; при воздействии же импульса СВЧ в установившемся режиме $T = T_{\text{к}}$ и $\nu = \nu_{\text{к}}$. Подстановка этих условий в предыдущее выражение приводит к трем равенствам, полезным в дальнейшем:

$$\frac{2e^2E_=^2}{3km\nu_{\text{н}}} = \delta_{\text{н}}\nu_{\text{ун}}(T_{\text{н}} - T_{\text{м}}),$$

$$\delta_{\text{к}}\nu_{\text{к}}\nu_{\text{ук}}(T_{\text{к}} - T_{\text{м}}) - \delta_{\text{н}}\nu_{\text{н}}\nu_{\text{ун}}(T_{\text{н}} - T_{\text{м}}) = \frac{e^2|E_\sim|^2\nu_{\text{к}}^2}{3km(\omega^2+\nu_{\text{к}}^2)}, \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta_{\text{н}}\nu_{\text{н}}\nu_{\text{ун}}(T_{\text{н}} - T_{\text{м}})}{\nu} +$$

$$+ \frac{\delta_{\text{к}}\nu_{\text{к}}\nu_{\text{ук}}(T_{\text{к}} - T_{\text{м}}) - \delta_{\text{н}}\nu_{\text{н}}\nu_{\text{ун}}(T_{\text{н}} - T_{\text{м}})}{\nu_{\text{к}}^2}\frac{\omega^2+\nu_{\text{н}}^2}{\omega^2+\nu^2}\nu - \delta\nu(T - T_{\text{м}}). \quad (3)$$

2. ПРИРАЩЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВРЕМЯ НАРАСТАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ГАЗОВОМ РАЗРЯДЕ ПРИ НАЛОЖЕНИИ ПОЛЯ СВЧ

Уравнения (2) и (3) можно использовать для определения величины приращения и времени нарастания температуры при наложении поля СВЧ.

Для упрощения решения примем следующие допущения.

1. Вся мощность СВЧ приложена к фарадееву темному пространству, где передача энергии от электронов частицам газа осуществляется в основном упругими столкновениями, т. е. $\nu = \nu_{\text{у}}$ и $\delta = \delta_{\text{у}} = 2m/M$ (M — масса молекулы).

2. Температура молекул значительно меньше температуры электронов:

$$T_{\text{м}} \ll T_{\text{н}},\ T_{\text{к}}.$$

3. Приложенная мощность мала, так что $T_{\text{к}} - T_{\text{н}} = \Delta T \ll T_{\text{н}},\ T_{\text{к}}$

4. При вычислении времени нарастания температуры пренебрежем изменением ν в выражении $1/(\omega^2+\nu^2)$.

С учетом этих допущений имеем

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\delta\nu_{\text{н}}^2 T}{\nu}+\frac{\delta\left(\nu_{\text{к}}^2 T_{\text{к}}-\nu_{\text{н}}^2 T_{\text{н}}\right)}{\nu_{\text{к}}^2}\nu-\delta\nu T. \tag{4}$$

Если считать, что основными столкновениями являются столкновения электронов с молекулами, то (4) можно переписать в виде

$$\frac{\overline{v^2 dv}}{dt}=\frac{\delta}{2}\left[\nu_{\text{н}}^4+\frac{\nu_{\text{к}}^4-\nu_{\text{н}}^4}{\nu_{\text{к}}^2}\nu^2-\nu^4\right].$$

Решением этого уравнения при граничном условии $\nu=\nu_{\text{н}}|_{t=0}$ является функция

$$\ln\frac{(\nu-\nu_{\text{к}})(\nu_{\text{н}}+\nu_{\text{к}})}{(\nu+\nu_{\text{к}})(\nu_{\text{н}}-\nu_{\text{к}})}+2\frac{\nu_{\text{к}}^2}{\nu_{\text{н}}^2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\nu\nu_{\text{к}}}{\nu_{\text{н}}^2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\nu_{\text{к}}}{\nu_{\text{н}}}\right)=-\delta\left(\nu_{\text{к}}+\frac{\nu_{\text{н}}^4}{\nu_{\text{к}}^3}\right)t.$$

Сохраняя предыдущие допущения, эту функцию можно упростить, положив $\nu_{\text{к}}\simeq\nu_{\text{н}}$. В этом случае имеем

$$\nu\simeq\nu_{\text{к}}+(\nu_{\text{п}}-\nu_{\text{к}})e^{-2\delta\nu_{\text{н}}t}=\nu_{\text{н}}+\Delta\nu\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

или

$$T^{\frac{1}{2}}\simeq T_{\text{н}}^{\frac{1}{2}}e^{-2\delta\nu_{\text{н}}t}+T_{\text{к}}^{\frac{1}{2}}\left(1-e^{-2\delta\nu_{\text{н}}t}\right)=T_{\text{п}}^{\frac{1}{2}}+\frac{\Delta T}{T_{\text{н}}^{\frac{1}{2}}}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Время нарастания фронта температурного импульса от 0,1 до 0,9 ΔT будет равно

$$\tau_{\text{ф}}=\frac{1{,}1}{\delta\nu_{\text{н}}}=\frac{1{,}1\tau_0}{pT_{\text{н}}^{\frac{1}{2}}}, \tag{5}$$

где $\tau_0=1/\delta\nu_0$; ν_0 — частота упругих столкновений электрона с молекулами газа при давлении $p=1$ *мм* рт. ст. и температуре электронов $T=1°\text{K}$.

В табл. 1 приведены значения δ, ν_0 и τ_0 для некоторых газов.

Таблица 1

Газ	He	Ne	Ar
$\delta=\frac{2m}{M}$	$2{,}8\cdot10^{-4}$	$5{,}5\cdot10^{-5}$	$2{,}8\cdot10^{-5}$
ν_0, *сек* $^{-1}$	$8{,}2\cdot10^{-6}$	$1{,}21\cdot10^{-7}$	$1{,}78\cdot10^{-7}$
τ_0, *мксек*	440	1500	2000

Для нахождения приращения температуры используем (2). Принимая те же упрощения, что и при определении длительности переднего фронта, имеем для малого сигнала

$$\Delta T=\frac{e^2|E_{\sim}|^2}{6km\delta(\omega^2+\nu^2)}.$$

Напряженность электрического поля E можно выразить через мощность, проходящую по волноводу P, согласно [12], соотношением

$$|E_{\sim}|^2=\frac{4P\operatorname{Re}W}{S},$$

где S и W — поперечное сечение и характеристическое сопротивление волновода. У волновода с волной типа H_{10}, заполненного диэлектриком,

$$W_{H_{10}}=\frac{377}{\sqrt{\varepsilon-\left(\frac{\omega_{\text{к}}}{\omega}\right)^2}}.$$

Если считать в первом приближении, что газовый разряд занимает весь объем волновода, а диэлектрическая проницаемость ионизированного газа выражается согласно [11] через

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2} - i\frac{\omega_0^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)},$$

где $\omega_0^2 = 3{,}2 \cdot 10^9 n$, то при подстановке в выражение для ΔT значений E, W и ε имеем

$$\Delta T = \frac{250 e^2 P}{Skm\delta(\omega^2 + \nu^2)} \operatorname{Re}\left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2} - \frac{\omega_к^2}{\omega^2} - i\frac{\omega_0^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (6)$$

Рассмотрим два случая.

1. $\omega^2 + \nu^2 \gg \omega_0^2$. При подстановке всех постоянных получим

$$\Delta T = \frac{1{,}4 \cdot 10^{16} P}{\delta\left(1 + \frac{\nu_0^2 p^2 T_н}{\omega^2}\right)} \frac{W_0}{S\omega^2} = \frac{\varkappa P}{1 + \frac{\nu_0^2 p^2 T_н}{\omega^2}}, \qquad (7)$$

Таблица 2

Газ	He	Ne	Ar
$\varkappa$, *град/мвт*	1,6	8	16

где $W_0 = 377/\sqrt{1 - (\omega_к/\omega)^2}$ (*ом*); S — сечение волновода (*см*^{2}); P — мощность (*мвт*); p — давление (*мм* рт. ст.); ΔT и T — температура (°К). Значения $\varkappa$, характеризующей величину прироста температуры при наложении 1 *мвт* мощности СВЧ, даны в табл. 2.

2. $\omega^2 \gg \nu^2$. В этом случае

$$\Delta T = \varkappa P \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_к}{\omega}\right)^2} \operatorname{Re}\left[1 - \frac{\omega_к^2 + \omega_0^2}{\omega^2} - i\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{\nu}{\omega}\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

Анализ формулы (8) показывает, что при постоянных частоте и мощности сигнала величина ΔT увеличивается с ростом n до определенного предела. При дальнейшем росте концентрации величина ΔT падает; грубо говоря, уменьшение произойдет, когда выражение $1 - (\omega_к^2 + \omega_0^2)\omega^{-2}$ станет меньше нуля. Поэтому значение предельной концентрации и максимального прироста температуры можно найти из условия $1 - (\omega_к^2 + \omega_0^2)\omega^{-2} = 0$, откуда

$$n_{кр} = 3 \cdot 10^{10} \omega^2 \left[\left(1 - \frac{\omega_к}{\omega}\right)^2\right];$$
$$\Delta T_{макс} = \frac{\varkappa}{\sqrt{2}} P \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \qquad (9)$$

3. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ГАЗОРАЗРЯДНОГО ДЕТЕКТОРА

Выражения (6), (7) и (8) можно использовать для нахождения зависимости изменения разрядного тока от приложенной мощности СВЧ, так как с изменением температуры меняются некоторые параметры, влияющие на разрядный ток. Действительно, плотность электронного тока (ионной частью тока в фарадеевом темном пространстве пренебрежем) в разряде определяется [13] соотношением

$$J = eD\frac{dn}{dt} + enKE,$$

где D и K — соответственно коэффициент диффузии и подвижность электронов.

Так как D, K и n зависят от температуры электронов как T^k, то приращение разрядного тока в установившемся режиме при изменении темпе-

ры на ΔT определится формулой

$$\Delta I = CI_0 \frac{\Delta T}{T_н},$$

I_0 — постоянная составляющая тока разряда через детектор; C — по янная, зависящая от того параметра, роль которого считается основ- в изменении разрядного тока.

Рассматривая различные предельные случаи, т. е. считая ток либо о диффузионным, либо только током проводимости, а также учитывая нение концентрации электронов при изменении коэффициента реком- ции, можно определить ряд предельных значений постоянной C. чина которой колеблется от $^3/_2$ до -1.

Вполне возможно, что все процессы в той или иной форме участвуют менении разрядного тока, причем в различных частях разряда роль го или иного процесса может быть преобладающей. Этим можно объяс изменение амплитуды, полярности и формы ульса при облучении различных частей газо- разряда.

Таблица 3

Газ	He	Ne	Ar
$\beta_{0\,мин}$, *ма/мвт*	0,03	0,2	0,8
$\beta_{0\,макс}$, *ма/мвт*	5	25,6	54

Исходя из установленного опытом факта, что асти максимального детектирования при на- нии поля СВЧ разрядный ток увеличивается, же учитывая большую роль явлений диффу- и рекомбинации в фарадеевом темном прост- стве, можно положить $C = {}^1/_2$.

Если разрядная трубка включена в цепь, ржащую эдс, последовательно с сопротивле- нагрузки $r_н$, то изменение температуры электронов разрядной труб- приведет к изменению напряжения на нагрузке:

$$\Delta U = -\frac{1}{2} I_0 \frac{r_н}{1 + \frac{r_н}{r_р}} \frac{\Delta T}{T_н} \simeq -\frac{I_0 r_н \varkappa P}{2\left(1 + \frac{r_н}{r_р}\right)\left(1 + \frac{\nu^2}{\omega^2}\right) T_н}.$$

$r_р$ — внутреннее сопротивление разрядного промежутка.

Для малых сопротивлений нагрузки и высоких частот это выраже- упростится:

$$\Delta U \simeq -\frac{I_0 r_н \varkappa P}{2T_н}. \qquad (10)$$

Тогда коэффициент передачи газового детектора

$$\beta = \left|\frac{\Delta U}{P}\right| = I_0 r_н \beta_0. \qquad (11)$$

Здесь β_0 — коэффициент передачи при $I_0 = 1$ *ма* и $r_н = 1$ *ком*.

Температура электронов в фарадеевом темном пространстве лежит ду температурой молекул $T_м = 300°$ К и температурой электронов оложительном столбе газового разряда $T_{пс}$.

В табл. 3 приведены значения предельных величин коэффициента дачи детектора, рассчитанные по (11). Для $\beta_{0\,мин}$ принималось, что $T_{0\,пс}$, значение T взято при больших давлениях газа.

При определении $\beta_{0\,макс}$ T принималась равной 300° К. Для полу- ия ΔT использовалась формула (2), где $T_н = T_м = 300°$ К.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

Выводы теории были проверены экспериментально на газоразрядных бках как отпаянных, так и присоединенных к вакуумной системе. качестве отпаянных трубок использовались частично неоновые сигналь- лампочки различных типов.

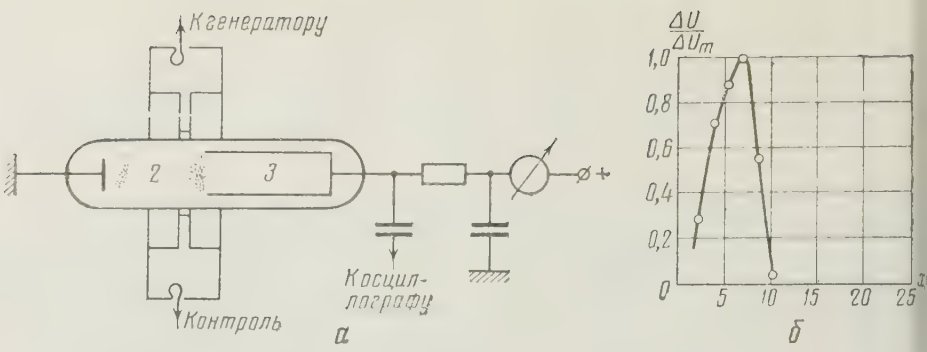


Рис. 1

а — блок-схема для изучения воздействия излучения СВЧ на различные области разр (*1* — отрицательное свечение; *2* — фарадеево темное пространство; *3* — положительный столб ряда); *б* — зависимость изменения величины продетектированного напряжения на нагрузоч сопротивлении от изменения места облучения разряда

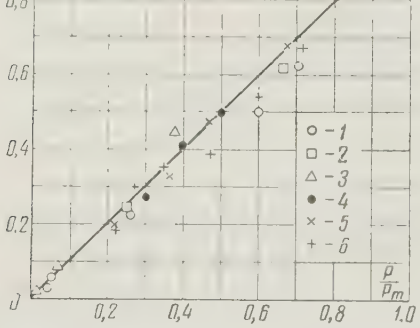


Рис. 2

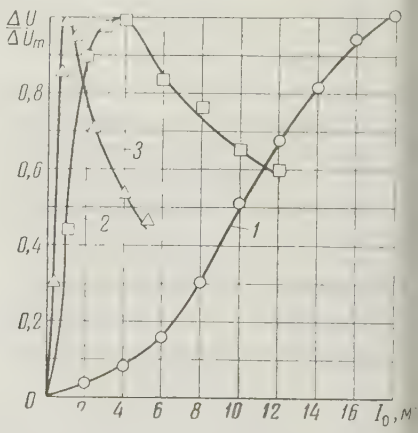


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость величины продетектированного напряжения на нагрузоч сопротивлении от величины подаваемой мощности:

1—λ_1, I_0=4 *ма*, $P_м$ = 1,4 *мвт*, МН-6; *2*—λ_1, I_0=10 *ма*, $P_м$=1,4 *мвт*, МН-6; *3*— λ_1,I_0= 16*ма*, $P_м$=0,8 *м* МН-6; *4*—λ_2,I_0=2 *ма*, $P_м$ = 10 *мвт*, ФН-2; *5* —λ_2, I_0 =2,4 *ма*, $P_м$= 16 *мвт*, МН-15; *6* — λ_2, I_0 = 3,4 $P_м$ = 10 *мвт*, МН-15

Рис. 3. Зависимость амплитуды продетектированного напряжения от величины стоянной составляющей разрядного тока для одной и той же лампочки МН-6:

1 — λ_1; *2* — $\lambda_2 = 4\,\lambda_1$; *3* — $\lambda_3 = 12\,\lambda_1$

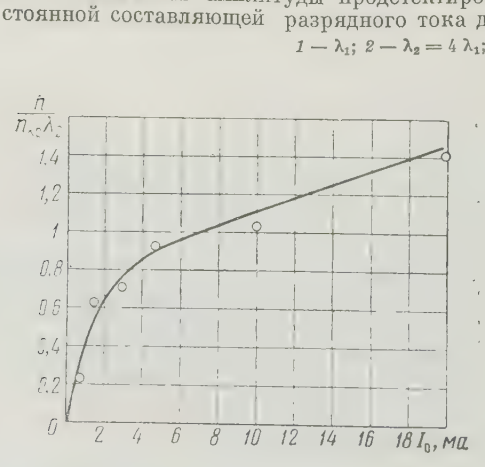


Рис. 4

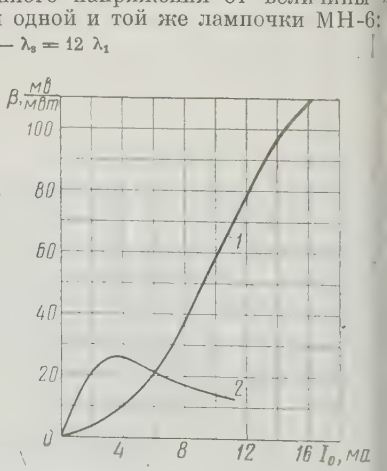


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость средней концентрации электронов в разрядной трубке от величины постоянной составляющей разрядного тока

Рис. 5. Усредненный коэффициент передачи газоразрядного детектора на неоновой лампочке МН-6:

1 — $\lambda_2 = 4\,\lambda_1$; *2* — λ_1

Эксперимент был проведен на трех длинах волн: λ_1; $\lambda_2 = 4\lambda_1$ и $\lambda_3 = 12\lambda_1$. Блок-схема эксперимента обычна и описана в работах [1, 2]. В основном проверялись некоторые зависимости, вытекающие из анализа формул (5) — (10), и изучалось воздействие СВЧ на различные части тлеющего разряда. Возбуждение различных частей разряда осуществлялось при помощи объемного резонатора, питаемого от генератора на клистроне ($\lambda = 10$ *см*). Из графика рис. 1,*б* видно, что максимальная величина сигнала получалась при облучении фарадеева темного пространства.

Таблица 4

λ	λ_1	λ_2
$\frac{n_{эксп}}{n_{теор}}$	1,6	0,9

Согласно (10) значения продетектированного сигнала при $\Delta T \ll T_п$, $T_к$ пропорциональны приложенной мощности. Рис. 2 подтверждает этот вывод. К аналогичному выводу пришла и Е. А. Здорнова [3], изучая поведение газового детектора на сантиметровых волнах.

Рассмотрение зависимости амплитуды продетектированного напряжения от величины разрядного тока (рис. 3) показывает, что коэффициент передачи растет монотонно с увеличением тока лишь до определенной величины. Сопоставление рис. 3 с рис. 4 позволяет сравнить значения предельной концентрации, полученные расчетным и экспериментальным путями.

В табл. 4 даны результаты этого сравнения. Расчет предельной концентрации произведен по формуле (9).

Из табл. 4 и формулы (10) видно, что предельные значения концентрации и тока растут с увеличением частоты сигнала. Следовательно, с увеличением частоты сигнала можно увеличить коэффициент передачи за счет повышения разрядного тока. Это подтверждается рис. 5, где представ-

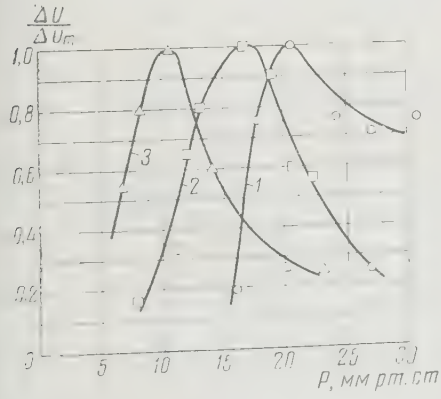


Рис. 6

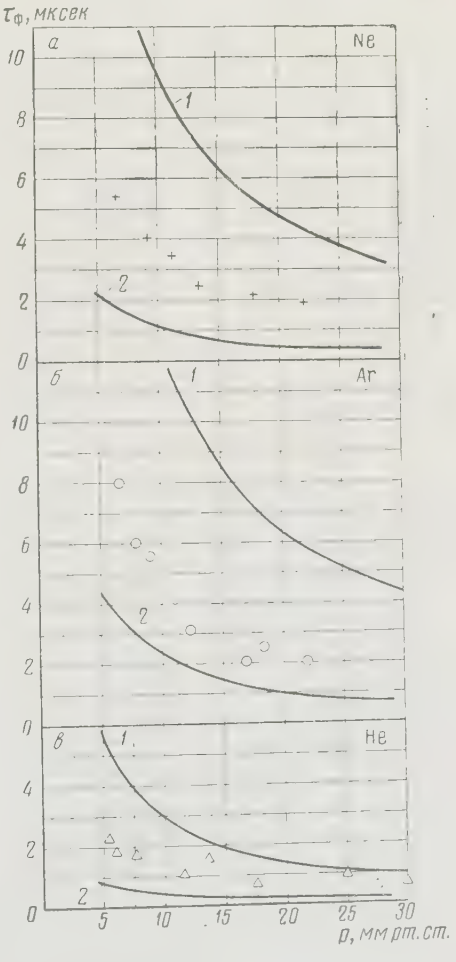


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость амплитуды продетектированного напряжения от давления газа для Ne:

1 — λ_1; *2* — $\lambda_2 = 4\lambda_1$; *3* — $\lambda_3 = 12\lambda_1$

Рис. 7. Зависимость длительности переднего фронта импульса от давления газа для Ne (*а*), Ar (*б*), He (*в*). Расчетные кривые построены по формуле (5):

1 — для $T = 300°$ К; *2* — для $T = T_{пс}$ ($T_{пс}$ взята из [14])

лены усредненные зависимости коэффициента передачи от разрядного тока для двух длин волн λ_1 и $4\lambda_1$.

Согласно (7), с увеличением давления газа коэффициент передачи газоразрядного детектора должен падать. Уменьшение величины продетектированного напряжения будет наблюдаться тем позже, чем выше частота сигнала. Из рис. 6 видно, что качественно это подтверждается для Ne. Для Ar и He закономерности аналогичны. Уменьшение величины коэффициента передачи при малых давлениях можно объяснить неучетом неупругих столкновений, число которых обратно пропорционально давлению. Так как $\delta_{\text{ну}} = 1/p^k$, то величина продетектированного напряжения должна заметно падать при достаточно малых давлениях.

На рис. 7,*а*,*б*,*в* представлены зависимости величины фронта импульсов от давления газа. Сплошными линиями нанесены расчетные значения зависимостей, построенные по (5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Газоразрядный детектор является квадратичным при малых величинах подводимой мощности.

2. Коэффициент передачи газоразрядного детектора пропорционален плотности энергии детектируемого сигнала и обратно пропорционален квадрату частоты сигнала. При применении стандартных волноводов как объемов, в которых смонтированы газоразрядные детекторы, коэффициент передачи детектора не будет зависеть от частоты сигнала, поскольку с увеличением частоты растет соответственно плотность энергии. Коэффициент передачи растет с увеличением разрядного тока только до некоторой оптимальной величины тока, определяемый соотношением между концентрацией электронов и частотой сигнала. С увеличением частоты сигнала эта величина возрастает.

3. Инерционность газоразрядного детектора зависит от рода и давления газа. С увеличением давления газа инерционность уменьшается.

Автор пользуется случаем выразить благодарность Э. В. Дмитриевой за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Барроуз, А. Бренвел, Газоразрядная трубка в качестве детектора сантиметровых волн, Вопр. радиолокационной техники, 1953, 1, 159.
2. Г. Д. Лобов, Л. К. Михайловский, Газовый детектор сантиметровых и миллиметровых волн, НДВШ (Радиотехника и электроника), 1958, 1, 1, 232.
3. Е. А. Здорнова, О некоторых результатах экспериментального исследования газоразрядного детектора на сантиметровых волнах, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, 2, 2, 262.
4. Burton, J. Udelson, Effect of microwave signals incident upon different regions of a hydrogen glow discharge, J. Appl. Phys., 1957, 28, 3, 380.
5. M. A. Lampert, A. D. White, Microwave technique for studying discharges, Electr. Commun., 1953, 30, 2, 124.
6. L. Goldstein, J. Anderson, Quenching of afterglow in gaseous discharge plasmas by low power microwaves, Phys. Rev., 1953, 90, 3, 486.
7. J. M. Anderson, Quenching of the negative glow by microwaves in cold-cathode gaseous discharges, Phys. Rev., 1957, 108, 3, 898.
8. L. Goldstein, J. Anderson, Interaction of microwaves propagated through a gaseous discharge plasma, Phys. Rev., 1953, 90, 1, 151.
9. L. Goldstein, J. Anderson, Momentum transfer crossection, Phys. Rev., 1956, 102, 2, 388.
10. М. Д. Райзер, И. С. Шпигель, Исследование плазмы при помощи микрорадиоволн, Успехи физ. наук, 1953, 164, 4, 34.
11. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГТТИ, 1953.
12. Измерения на сверхвысоких частотах, Изд. Советское радио, 1952.
13. В. Л. Грановский, Электрический ток в газе, I, ГТТИ, 1952.
14. А. Энгель, М. Штенбек, Физика и техника электрического разряда в газах, 1, 2, НКТП СССР, 1935.

Московский энергетический институт
Кафедра теоретических основ радиотехники

Поступила в редакцию
9 IV 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 1

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ РАБОТЫ ФАЗОМЕТРА НА СВЧ

С. Б. Рубин

Рассмотрена с теоретической стороны точность работы отдельных узлов серродинного фазометра на СВЧ. Учтено влияние нестабильности частоты клистронного генератора, неидеальности характеристик серродинного способа смещения частоты, наличия стоячих волн в волноводах, неидеальности амплитудных ограничителей и фазовых детекторов на возникновение паразитных набегов фазы в высокочастотном и низкочастотном трактах фазометра.

ВВЕДЕНИЕ

Применение различных способов измерений фазы колебаний СВЧ зависит от требований точности, скорости процессов, автоматичности измерений и т. п. Для измерений и автоматической записи быстро меняющихся во времени фазовых сдвигов удобны фазометрические системы с преобразованием частоты. В таких системах измерение фазового сдвига колебаний СВЧ сводится к измерению фазового сдвига сигнала более низкой частоты, что упрощает автоматизацию измерений. Оказывается возможным в значительной степени устранить ошибки измерения фазы из-за изменения амплитуды сигналов, не увеличивая при этом инерционность системы.

Преобразование частоты в фазометрической системе осуществляют многими способами. Рядом преимуществ обладает метод смещения частоты при помощи лампы бегущей волны или ферритовых вставок в волновод [1, 2, 3].

Ниже рассмотрены некоторые теоретические вопросы точности фазометра, в котором использован так называемый серродинный способ смещения частоты — смещение частоты при помощи модуляции скорости потока электронов в лампе бегущей волны пилообразным напряжением *. Фазометр предназначен для записи однократных процессов быстро изменяющихся фазовых сдвигов сигналов СВЧ **.

Упрощенная блок-схема фазометра представлена на рис. 1. Фазометр состоит из замкнутого высокочастотного волноводного тракта и тракта промежуточной частоты. В волноводный тракт входят: *1* — клистронный генератор; *2* — лампа бегущей волны; *3* — кристаллический смеситель; *4* — развязывающие ферритовые вентили, согласующие элементы и т. п.; *5* — так называемый «специальный волноводный промежуток». Тракт промежуточной частоты состоит: *6* — стабилизированного кварцем генератора; *7* — генератора пилообразного напряжения, модулирующего лампу бегущей волны и синхронизированного с генератором с кварцем; *8* — фазовращателя; *9* — усилителя промежуточной частоты с фильтром высокой частоты и *10* — двух фазовых детекторов: с непосредственным отсчетом фазы и с m-кратным увеличением измеряемого фазового сдвига; *11* — ограничители амплитуды; *12* — фильтры m-гармоники. Записывающие и индикаторные элементы на блок-схеме не показаны.

* Подробное описание процесса сдвига частоты при помощи ЛБВ приведено в [1].

** Макет подобного фазометра разработан А. М. Пилтакяном, И. А. Хмельницким, А. М. Кузнецовым, С. Б. Рубиным.

Фазовый сдвиг и частично изменение амплитуды сигнала СВЧ происходят в одном из плечей высокочастотного тракта вследствие изменения электродинамических свойств среды, заполняющей специальный волноводный промежуток (сокращенно назовем его Q-промежуток).

На вход ЛБВ от клистронного генератора поступает сигнал частоты f_0. В результате пилообразной модуляции лампы с промежуточной частотой $f_п$ с выхода ее в Q-промежуток и далее в смеситель поступает сигнал со сдвинутой частотой $f = f_0 + f_п$ (или $f = f_0 - f_п$). В смеситель поступает также опорный сигнал непосредственно от клистронного генератора.

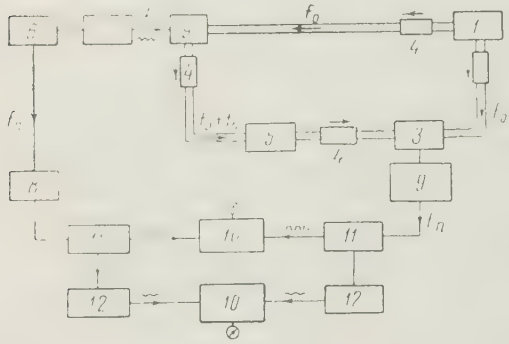


Рис. 1. Блок-схема фазометра

Промежуточная частота $f_п$ выбирается с таким расчетом, чтобы она была значительно больше предполагаемых наивысших частотных составляющих фазового сдвига.

Выходной сигнал частоты биений фильтруется так, чтобы выделить только составляющую частоты $f_п$. Полученный сигнал вообще оказывается пропорциональным амплитуде входного сигнала, сдвиг фазы сигнала СВЧ, получившейся в Q-промежутке, в принципе целиком переносится на фазу выходного сигнала. Окончательное измерение фазового сдвига производится уже на промежуточной частоте $f_п$ путем сравнения выходного сигнала с опорным сигналом, подаваемым от генератора, стабилизированного кварцем. Фазовращатель в цепи опорного сигнала позволяет устанавливать начальный сдвиг фазы.

По сравнению с супергетеродинным методом преобразования частоты рассматриваемая система не требует точной стабилизации разности частот двух сигналов СВЧ, так как система является фазово-когерентной. Использование лампы бегущей волны для смещения частоты обеспечивает хорошую изоляцию между входным и выходными сигналами на сдвинутой частоте.

Описанный фазометр предназначен для записи кратковременного однократного процесса изменения набега фазы сигнала СВЧ, проходящего через исследуемый Q-промежуток. Поэтому различные внешние или внутренние причины, вызывающие постоянный во времени или медленно меняющийся набег фазы, можно не принимать во внимание. Они лишь приводят к изменению отсчетного уровня, от которого начинается динамический процесс изменения фазового сдвига. Таким образом, рассматривая причины, вызывающие паразитные набеги фазы, прежде всего необходимо выяснить, достаточно ли быстро изменяются эти набеги во времени

Причин, вызывающих ошибки измерений фазы фазометром и ограничивающих его чувствительность, много. Ниже рассмотрены основные из них.

1. ПАРАЗИТНЫЕ НАБЕГИ ФАЗЫ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ТРАКТЕ

Влияние стоячих волн в волноводных трактах. Несмотря на наличие развязывающих ферритовых вентилей и согласующих элементов, не удается целиком устранить отражение сигналов в волноводных элементах. При наладке системы добиваются сравнительно малых величин коэффициента стоячей волны, что дает возможность в первом приближении пренебречь многократными отражениями волн. Ниже

смотрен поэтому только случай, когда к детектору смесителя кроме мой приходит только одна отраженная волна.

Пусть детектор находится в сечении x волновода. Тогда прямой сиг- частоты $f_0 + f_п$, приходящий в смеситель с выхода лампы бегущей ны и прошедший через Q-промежуток, описывается выражением

$$U_1 = A(t)\cos\left[(\omega+\Omega)t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \Psi(t)\right], \qquad (1)$$

$\Psi(t)$ — сдвиг фазы, приобретенный в исследуемом Q-промежутке, овная величина, подлежащая измерению; $A(t)$ — амплитуда основного нала; $\omega = 2\pi f_0$; $\Omega = 2\pi f_п$; λ — длина волны в волноводе, соответ- ующая частоте ω. Величина $A(t)$ зависит от электродинамических свойств ды в исследуемом Q-промежутке и определяется затуханием сиг- а в этой среде. Поэтому она также в некоторых пределах меняется со менем. Изменение амплитуды основного сигнала оказывается неизбеж- побочным явлением, затрудняющим измерение фазы.

К детектору смесителя подходят кроме того опорный сигнал частоты f_0

$$U_2 = D\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \psi\right), \qquad (2)$$

тоянных амплитуды и фазы и соответствующие отраженные сигналы. Обычно детектор смесителя находится в режиме стоячей волны. Тогда $l - \frac{\lambda}{4}$, где l — расстояние короткозамыкающего поршня от на- а координат. Комплексный коэффициент отражения R, малой по внению с длиной волны неоднородности в волноводе, представляющей плексную проводимость Y и находящейся на расстоянии нечетного та четвертей волны от короткозамыкающего поршня, приближенно ен [4]

$$R \simeq 1 - Z_0 Y, \qquad (3)$$

Z_0 — волновое сопротивление волновода. В данном случае такой неод- одностью является детектор. При этих условиях суммарные сигналы тот $f_0 + f_п$ и f_0 будут иметь амплитуды

$$A_1(t) = A(t)\sqrt{1 + 2\rho\cos\gamma + \rho^2},\quad D_1 = D\sqrt{1 + 2\rho'\cos\gamma' + \rho'^2} \qquad (4)$$

бавочные сдвиги фазы

$$s = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi l}{\lambda} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho\sin\gamma}{1+\rho\cos\gamma},\quad s' = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi l}{\lambda} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho'\sin\gamma'}{1+\rho'\cos\gamma'}, \qquad (5)$$

ρ, ρ' — модули коэффициентов отражения и $|\gamma|, |\gamma'| < \pi$. Наличие вто- слагаемых в (5) может привести к искажению фазы. Если величина Y рмуле (3) остается постоянной (или очень мало меняется) при изме- ии амплитуды и фазы приходящего сигнала во всем динамическом диа- не, то и вносимый паразитный фазовый сдвиг оказывается постоян- . Таким образом, при исследовании динамического процесса этот сдвиг пасен.

Влияние характеристик кристаллического смеси- я. Для определения возможных искажений, возникающих в смеси- при различных уровнях основного и опорного сигналов, воспольз- ся основными формулами обычной теории кристаллического смеси- . Эквивалентная схема смесителя представлена на рис. 2. Сопро- ение нагрузки промежуточной частоты $Z_п$ сигналам высокой часто- очень мало. Основной и опорный сигналы u_c и $u_г$ можно взять в ви- 1) и (2), включив для краткости постоянную разность фаз в $\Psi(t)$. Так уже отмечено выше, скорость изменения функций $A(t)$, $\Psi(t)$

много медленнее, чем изменение основной гармонической составляющ напряжения $u_п$ промежуточной частоты.

Статическую характеристику детектора для напряжений меньше с хорошей точностью можно считать экспоненциальной:

$$j_д = j_0 (e^{au_д} - 1),$$

где $j_д$ — ток детектора; j_0, a — параметры детектирования; $u_д = u_с + u_г - u_п$ — падение напряжения на детекторе. Учитывая малость вел чины $u_п$ и используя формулы разложения в ряд e^x по функциям Бе селя, выделим составляющую тока промежуточной частоты $(j_д)_п$. Пер менная составляющая промежуточной частоты представится то в виде

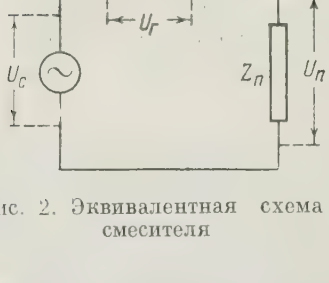


Рис. 2. Эквивалентная схема смесителя

$$u_п^{\sim} = \frac{2j_0 Z_п I_1(aA) I_1(aD)}{1 + aj_0 I_0(aD) I_0(aA) Z_п} \cos(\Omega t + \Psi).$$

Если амплитуда сигнала $A(t)$ достаточно м ла, а амплитуда D опорного сигнала вели (т. е. преобразование производится на вы ком уровне), то формула (7) приводится виду

$$u_п^{\sim} \simeq \frac{aj_0 Z_п I_1(aD)}{1 + aj_0 Z_п I_0(aD)} A \cos(\Omega t + \Psi).$$

Формулы (7), (8) показывают, что в обоих случаях фазовый сдвиг Ψ целиком переносится на сигнал промежуточной частоты. Искажение а плитуды, имеющее место в первом случае (т. е. если уровень основно сигнала тоже достаточно велик), может не иметь существенного значен для измерения фазового сдвига, если величина $I_1(aA(t))$ не обращает в нуль.

Таким образом, в смесителе фазометра допустимо некоторое завышен мощности основного сигнала по сравнению с обычным случаем преобраз вания на высоком уровне. При больших потерях основного сигнала Q-промежутке это обстоятельство существенно.

Формулу (7) или (8) можно применить для случая, когда суммарны сигнал $u_с + u_г$ представлен в форме (4), (5). Считая для простоты, ч амплитуда $A(t)$ достаточно мала, из формулы (8) получим

$$u_п^{\sim} \simeq \frac{aj_0 Z_п I_1(aD_1)}{1 + aj_0 Z_п I_0(aD_1)} A_1(t) \cos[\Omega t + \Psi(t) - \psi + s - s'].$$

Таким образом, ошибка фазы, вносимая за счет существования отраже ной волны в смесителе, выражается в виде

$$F = s - s' + \psi,$$

ψ — некоторый несущественный постоянный сдвиг фазы; разность s — в слабой степени может зависеть от времени и искажает измерения п переходном процессе.

Неидеальность характеристик лампы бегущей волны и генератора пилообразного напряжения. Выше предполагалось, что при помощи лампы бегущей волн осуществляется идеальное преобразование (сдвиг) частоты. На практик оказывается, что выходной сигнал содержит не одну спектральную л нию, соответствующую смещенной частоте $f_0 + f_п$ (или $f_0 - f_п$), а поло частот, смещенную от частоты выходного сигнала на гармоники частот

)ообразного напряжения $f_п$. При правильной регулировке лампы и
литуды пилообразного напряжения амплитуды этих гармоник ока-
аются значительно ниже амплитуды главного выходного сигнала. Эти
лоники вызываются [1, 2]: 1) амплитудной модуляцией радиочастот-
) сигнала, так как при пилообразной модуляции напряжения на спи-
ки лампы несколько меняется ее коэффициент усиления; 2) нелинейной

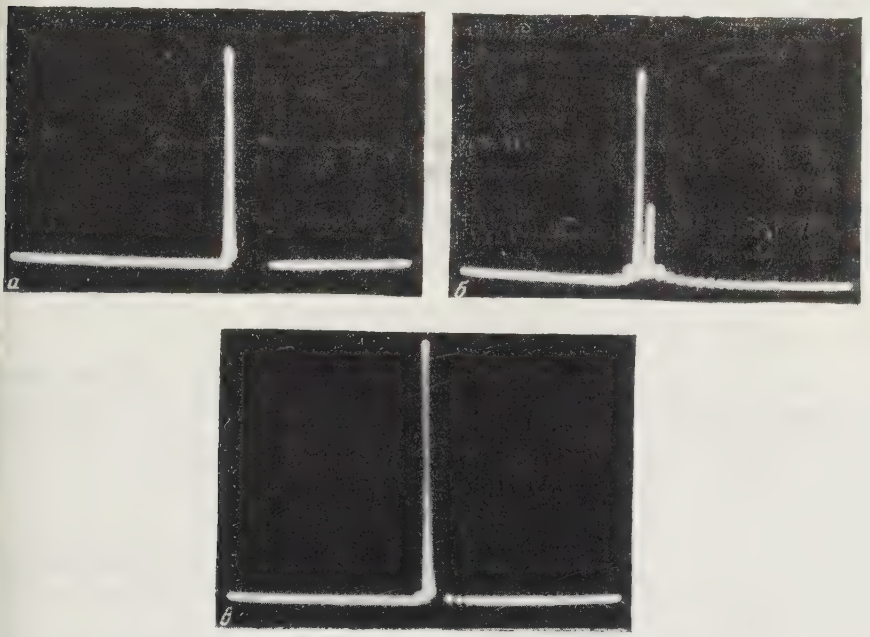


Рис. 3. Спектр сигнала после серродинного преобразования

исимостью между сдвигом фазы входного сигнала и модулирующим ско-
ть пучка электронов пилообразным напряжением, создающим этот
иг; 3) недостатками пилы: конечной длительностью обратного хода,
инейностью, переменным наклоном, неправильным выбором крутизны.

Преобразование частоты при помощи лампы бегущей волны можно
блюдать, например, с помощью спектрального анализатора. На рис. 3
едставлены фотографии спектра выходного сигнала лампы 3-*см* диа-
зона: *а* — спектральная линия, соответствующая исходной частоте
$= 10^4$ *Мгц*, пилообразная модуляция отсутствует; *б* — спектр выход-
го сигнала при модуляции пилообразным напряжением частоты $f_п =$
250 *кгц*. Видны линии сигналов основной частоты f_0, смещенной ча-
оты $f_0 + f_п$ и гармоники; *в* — спектр выходного сигнала после регу-
ровки лампы и подбора амплитуды пилообразного напряжения.
дна в основном только одна спектральная линия $f_0 + f_п$; ампли-
ды сигнала f_0 и остальных гармоник в значительной степени подав-
ны.

По указанным выше причинам полностью освободиться от дополни-
ьных гармоник не удается. При смешении выходного сигнала с опор-
м на выходе смесителя получается результирующий сигнал сложного
ектрального состава, содержащий гармоники, кратные частоте $f_п$.
ледствие резонансных свойств усилителя промежуточной частоты,
строенного на $f_п$, большинство кратных гармоник не дают вклада в
разитный набег фазы. Опасной оказывается гармоника, возникающая
за наличия на выходе лампы не вполне подавленного сигнала зер-
льной частоты $f_0 - f_п$.

Пусть сигнал на выходе состоит только из трех частот: $\omega + \Omega$ — основной и не вполне подавленных, $\omega - \Omega$ — зеркальной и ω — исходной с соответствующим соотношением амплитуд $1 : \alpha : \beta$, где α, β — малые по сравнению с единицей величины. Так как все три частоты весьма близки, то свойства среды в Q-промежутке для всех трех составляющих сигнала одинаковы. Поэтому набег фазы и изменение амплитуд во времени при прохождении сигнала через Q-промежуток для составляющих тоже будут одинаковыми.

Сигнал промежуточной частоты на выходе смесителя можно получить в виде

$$u_{\text{п}} = \frac{Z_{\text{п}} j_0 [I_0(aD) - 1 + \beta a I_1(aD) A(t) \cos \Psi(t)]}{1 + a j_0 Z_{\text{п}} I_0(aD)} + \\ + \frac{a j_0 Z_{\text{п}} I_1(aD)}{1 + a j_0 Z_{\text{п}} I_0(aD)} A(t) \sqrt{1 + \alpha^2} \cos [\Omega t + F(t)], \qquad (11)$$

где

$$F(t) = \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \operatorname{tg} \Psi(t) \right].$$

Из (11) следует, что составляющая частоты исходного сигнала оказывает влияние только на «постоянную составляющую тока». Составляющая на зеркальной частоте приводит к искажению фазового сдвига. Так как α мало, то при $|\Psi(t)| < \pi/2$ можно представить

$$F(t) \simeq \Psi(t) + \alpha \sin 2\Psi(t). \qquad (12)$$

Второе слагаемое в (12) в явном виде представляет искажение фазы в высокочастотном тракте вследствие наличия нескомпенсированного сигнала зеркальной частоты.

Влияние паразитной пилообразной модуляции усиления с частотой $f_{\text{п}}$ можно рассмотреть непосредственно. В этом случае на вход смесителя поступит сигнал в виде

$$u_{\text{с}} = \left(1 - \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\Omega t}{n}\right) A(t) \cos [(\omega + \Omega) t + \Psi(t)], \qquad (13)$$

где b — глубина модуляции. В результате преобразования на выходе смесителя сигнал промежуточной частоты

$$\widetilde{u_{\text{п}}} = \frac{a j_0 I_1(aD) Z_{\text{п}}}{1 + a j_0 Z_{\text{п}} I_0(aD)} A(t) \left\{ \cos [\Omega t + \Psi(t)] - \frac{b}{2\pi} \sin [\Omega t - \Psi(t)] \right\}; \qquad (14)$$

как и следовало ожидать, он отличается от (11) только постоянным сдвигом фазы. Таким образом, зная глубину паразитной модуляции усиления лампы бегущей волны, можно определить величину вносимого этой модуляцией искажения фазы.

Влияние нестабильности клистрона. Вследствие того, что в принципе система когерентна, в идеальном случае неустойчивость частоты клистрона не должна приводить к искажению исследуемого полезного сдвига фазы, получившегося в одном из каналов. Однако на самом деле, вследствие некоторой зависимости параметров элементов тракта от частоты и неодинаковой электрической длины обоих каналов, нестабильность клистрона влияет на точность измерений фазового сдвига.

а) Влияние запаздывания в одном из каналов. Представим сигнал клистронного генератора, имеющего нестабильную частоту, в виде

$$u = B \cos [\omega_0 + \Delta\omega(t)] t, \qquad (15)$$

где величина $\Delta\omega(t)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию макс $|\Delta\omega(t)| \leqslant \omega_0$ и показывающая уход частоты клистрона.

Этот сигнал разделяется на два сигнала, приходящих по разным каналам в смеситель с некоторым запаздыванием один относительно другого. Сигнал, прошедший через ЛБВ и Q-промежуток, приходит со сдвинутой частотой и добавочным (полезным) сдвигом фазы $\Psi(t)$. Для случая преобразования на высоком уровне при условии, что величина запаздывания τ мала, искажение фазы представляется функцией времени

$$F(t) = \tau \frac{d\Delta\omega}{dt} t. \tag{16}$$

б) Влияние неидеальности частотных характеристик каналов опорного и основного сигналов. Допустим для простоты, что имеется только один элемент (например в канале опорного сигнала), частотная характеристика которого неидеальна. Сигналы на входе и выходе этого элемента связаны соотношением

$$u_{\text{вых}} = H(u_{\text{вх}}) = H\left(\frac{\omega(t)}{\omega_0}\right) D \cos\left[\omega(t)\, t + \varphi\left(\frac{\omega(t)}{\omega_0}\right)\right], \tag{17}$$

где величина $H\left(\frac{\omega(t)}{\omega_0}\right) \simeq 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\frac{dH}{d\omega}$ показывает изменение амплитуды, а $\varphi\left(\frac{\omega(t)}{\omega_0}\right) \simeq \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\frac{d\varphi}{d\omega}$ — изменение фазы сигнала. При этом $H(1) = 1$, $\varphi(1) = 0$, т. е. при номинальной частоте искажений не вносится.

При сделанных предположениях сигнал промежуточной частоты на выходе смесителя представится в виде

$$u_{\text{п}} = \frac{aj_0 Z_{\text{п}} I_1 [aD(1+\alpha)]}{1 + aj_0 Z_{\text{п}} I_0 [aD(1+\alpha)]} A \cos\left[\Omega t + \Psi(t) + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\frac{d\varphi}{d\omega}\right], \tag{18}$$

где через $\alpha(t)$ обозначена малая по модулю величина $\frac{\Delta\omega(t)}{\omega_0}\frac{dH}{d\omega}$. В данном случае искажение фазы в высокочастотном тракте выражается членом

$$F(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{d\varphi}{d\omega}\Delta\omega(t), \tag{19}$$

где $\Delta\omega(t)$ — некоторая, может быть случайная, функция времени.

2. ПАРАЗИТНЫЕ НАБЕГИ ФАЗЫ В ТРАКТЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЧАСТОТЫ

В предыдущем параграфе показано, что при определенных условиях из смесителя и усилителя промежуточной частоты в тракт промежуточной частоты приходит сигнал вида

$$u = QA(t)\cos[\Omega t + \Psi(t)], \tag{20}$$

где $Q = \text{const}$; $\Psi(t)$ — измеряемый сдвиг фазы.

Зависимость амплитуды сигнала от времени затрудняет непосредственное измерение фазы на промежуточной частоте. Устранить эту зависимость в тракте промежуточной частоты можно двумя путями: автоматической регулировкой усиления или ограничением амплитуды сигнала. При автоматической регулировке усиления возможны зависящие от времени паразитные фазовые сдвиги, которые всегда возникают при наличии обратных связей в комбинации линейных и нелинейных элементов [5]. Поэтому более пригоден второй способ. Искажения, вносимые при применении способа ограничения амплитуды сигналов, ниже рассмотрены более подробно.

1. В идеальном случае двустороннее ограничение сигнала должно проводиться при помощи элемента, вольтамперная характеристика которого представлена на рис. 4. В реальных случаях характеристика ограничителя представляется некоторой сложной кривой или в упрощенном случае соединением ломаных, как показано, например, на рис. 5. Удобной для расчетов аналитической формой функций $j = f(u)$, изображенных на рис. 4 и 5 (а также и для других более сложных случаев), является следующая:

$$j(u) = -\frac{H_0}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi(p)\, e^{pu} dp, \tag{21}$$

где $\xi(p)$ — преобразование Лапласа от этих функций, сдвинутых по оси ординат вверх на $H_0/2$. Для первого случая (рис. 4)

$$\xi(p) = \xi_1(p) = \frac{H_0}{p}; \tag{22}$$

для второго случая (рис. 5)

$$\xi(p) = \xi_2(p) = H_0 \operatorname{tg}\theta \left[\frac{1}{p^2} - \frac{e^{-pb}}{p^2}\right]. \tag{23}$$

Сигнал является функцией времени $u = u(t)$. Для определения спектрального состава тока как функции времени $j(t)$ при помощи формулы (21) во многих случаях достаточно определить спектр функции $e^{pu(t)}$.

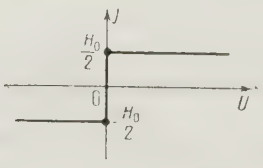


Рис. 4. Характеристика идеального ограничителя

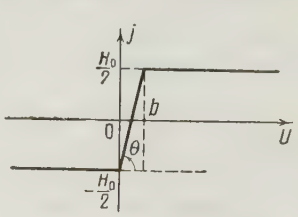


Рис. 5. Характеристика ограничителя

Применим формулу (21) для сигнала вида (20). Пусть

$$u(t) = E(t) \sin[\Omega t + \Psi(t)] + u_0. \tag{24}$$

Предположим, кроме того, что амплитудная модуляция не достигает 100%, т. е. $E(t) \geqslant E_0 > 0$. Можно записать

$$\exp\{p[u_0 + E\sin(\Omega t + \Psi)]\} =$$

$$= e^{pu_0}\Big\{I_0(pE) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} I_{2k-1}(pE)\sin[(2k-1)(\Omega t + \Psi)] +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k I_{2k}(pE)\cos 2k(\Omega t + \Psi)\Big\}. \tag{25}$$

Подставляя этот равномерно сходящийся ряд в (21) и интегрируя почленно, получим разложение тока $j(t)$ в ряд вида Фурье (в данном случае разложение нельзя назвать рядом Фурье, так как коэффициенты его являются медленно меняющимися функциями времени). Соответствующие коэффициенты легко вычислить, если воспользоваться извест-

ным интегральным представлением функций $I_m(q)$:

$$I_m(q) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{q\cos\psi}\cos m\psi d\psi. \tag{26}$$

В случае неидеальной характеристики (рис. 5) точные выражения для коэффициентов получаются несколько длинными. Для упрощения предположим (как это и есть на самом деле), что нарастание тока происходит очень быстро, т. е. $\operatorname{tg}\theta$ велик, а $b = H_0 \operatorname{ctg}\theta$ мало. Кроме того, рассмотрим сразу симметричное ограничение, когда $u_0 = b/2$. Тогда приближенно, с точностью до членов первого порядка малости относительно b/E в выражениях для коэффициентов ряда, получим

$$j(t) = \frac{2H_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2k+1)\dfrac{b}{E(t)}\right]}{2k+1}\sin\left[(2k+1)(\Omega t + \Psi(t))\right]. \tag{27}$$

Таким образом, ток $j(t)$ зависит от изменения амплитуды входного сигнала. В идеальном случае $b = 0$

$$j(t) = \frac{2H_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)(\Omega t + \Psi(t))\right]}{2k+1}; \tag{28}$$

$j(t)$ не зависит от изменения амплитуды $E(t)$.

2. Окончательное детектирование фазового сдвига в фазометре происходит путем сравнения основного сигнала с опорным сигналом от генератора с кварцем. После прохождения через ограничитель согласно (27) имеем

$$u_c = u_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2k+1)\dfrac{b}{E(t)}\right]}{2k+1}\sin\left[(2k+1)(\Omega t + \Psi(t))\right]. \tag{29}$$

Синусоидальный сигнал генератора с кварцем после прохождения через ограничитель в канале опорного сигнала также приобретает вид (29):

$$u_{оп} = u_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2k+1)\dfrac{b'}{E_{оп}}\right]}{2k+1}\sin(2k+1)\Omega t, \tag{30}$$

где b' — параметр ограничителя, аналогичный параметру b; $E_{оп}$ — амплитуда опорного сигнала. В отличие от (29), $E_{оп}$ не зависит от времени.

Сравнение основного и опорного сигналов производится в двух параллельных каналах при помощи грубого и точного фазовых детекторов при основном, указанном выше, условии, что изменение амплитуды $E(t)$ и фазы $\Psi(t)$ происходит во много раз медленнее, чем изменение функции $\sin\Omega t$.

а) «Грубый канал». Суммарное напряжение $u = \alpha u_c(t) + \beta u_{оп}(t)$ подается на диодный детектор, который для простоты будем считать квадратичным. Коэффициенты α, β характеризуют суммирующий элемент.

Характеристика детектора: $j_д = s_1 u_д^2 + s_2 u_д + s_3$, где $j_д$ — ток детектора; $u_д = \alpha u_c + \beta u_{оп} - v$ — напряжение на детекторе; v — низкочастотное напряжение на нагрузочном сопротивлении r детектора. Низкоча-

стотная составляющая тока получается в виде

$$(j_д)_= = s_3 - v s_2 + v^2 s_1 + U_0^2 s_1 \left\{ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2 (2k+1) \frac{b}{E}}{(2k+1)^2} + \right.$$

$$+ \frac{\beta^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2 (2k+1) \frac{b'}{E_{оп}}}{(2k+1)^2} + \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \left[(2k+1) \frac{b}{E} \right] \cos \left[(2k+1) \frac{b'}{E_{оп}} \right]}{(2k+1)^2}$$

$$\left. \times \cos (2k+1) \Psi \right\}. \qquad (31)$$

Суммы вычисляются в конечном виде, и в результате имеем

$$(j_д)_= = s_3 - v s_2 + v^2 s_1 + U_0^2 s_1 \left\{ \frac{\pi^2}{16} (\alpha+\beta)^2 - \frac{\pi}{8} \left[\alpha^2 \frac{b}{E} + \beta^2 \frac{b'}{E_{оп}} \right] - \right.$$

$$- \frac{\pi\alpha\beta}{16} \left[\left| \frac{b}{E} + \frac{b'}{E_{оп}} - \Psi \right| + \left| \frac{b}{E} + \frac{b'}{E_{оп}} + \Psi \right| + \left| \frac{b}{E} - \frac{b'}{E_{оп}} - \Psi \right| + \right.$$

$$\left. \left. + \left| \frac{b}{E} - \frac{b'}{E_{оп}} + \Psi \right| \right] \right\}. \qquad (32)$$

Формула (32) справедлива в том случае, если величины, стоящие под знаками абсолютных значений, меньше π. Обозначив выражение в фигурной скобке (32) через $F(\Psi)$ и принимая во внимание обычное соотношение $v = r (j_д)_=$, находим

$$v = \frac{1 + r s_2 \pm \sqrt{(1 + r s_2)^2 - 4 r s_1 [s_3 + U_0^2 s_1 F(\Psi)]}}{2 r s_1}. \qquad (33)$$

Итак, индикатор, реагирующий на выходное напряжение грубого канала фазометра, в рассмотренном случае должен градуироваться в соответствии с формулой (33).

Рассмотрим подробнее выражение $F(\Psi)$. В идеальном случае $b = b' = 0$, $\alpha = \beta$

$$F(\Psi) = \frac{\alpha^2 \pi}{4} [\pi - |\Psi(t)|] \qquad (34)$$

— фаза может непрерывно изменяться от нуля до π. Если суммирующий элемент несимметричен, т. е. $\alpha \neq \beta$, то получается несущественный постоянный сдвиг фазы. В общем случае b, b' отличны от нуля, но достаточно малы. При $\alpha = \beta$ имеем

$$F(\Psi) = \frac{\pi\alpha^2}{4} \left[\pi - |\Psi(t)| + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{E(t)} + \frac{b'}{E_{оп}} \right) \right]. \qquad (35)$$

Зависящее от времени добавочное слагаемое учитывает вносимое из-за несовершенства ограничителей искажение фазы.

При фазовых сдвигах

$$|\Psi(t)| \leqslant \frac{b}{E(t)} + \frac{b'}{E_{оп}} \qquad (36)$$

величина $F(\Psi)$ может изменяться скачками. Это показывает, что в пределах интервала (36) имеются зоны нечувствительности.

б) «Точный канал». В этом канале из (29) и (30) предварительно выделяется какая-либо m-гармоника частоты Ω и затем производится измерение относительного фазового сдвига, который, таким образом, ока-

ывается увеличенным в m раз ($m = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3,\ldots$). Входные сигналы фазового детектора

$$w_c = U_0 \cos \frac{mb}{E(t)} \sin m[\Omega t + \Psi(t)], \tag{37}$$

$$w_{оп} = U_0 \cos \frac{mb'}{E_{оп}} \sin m\Omega t. \tag{38}$$

Как видно из (37), основной сигнал получается амплитудно-модулированным, хотя глубина модуляции в связи с малостью параметра b невелика.

Детектирование фазового сдвига при помощи пикового балансного детектора, поставленного в режим линейного детектирования, приведет к следующему результату: индикатор пикового балансного детектора должен реагировать на величину v, пропорциональную разности амплитуд суммарного $w_c + w_{оп}$ и разностного $w_c - w_{оп}$ сигналов. Ввиду малости величин mb/E и $mb'/E_{оп}$, эту величину можно привести к виду

$$v \simeq 2U_0 \sqrt{1 - m^2\left[\left(\frac{b}{E(t)}\right)^2 + \left(\frac{b'}{E_{оп}}\right)^2\right]} \left\{\cos \frac{m}{2} \Psi(t) - \sin \frac{m}{2} \Psi(t)\right\}. \tag{39}$$

Коэффициент перед фигурной скобкой зависит от изменения амплитуды $E(t)$ входного сигнала и приводит к искажению результатов измерений. Для устранения этого искажения целесообразно перед детектированием ограничить амплитуды входных сигналов (37), (38).

ВЫВОДЫ

Перечислен ряд факторов, влияние которых на точность работы фазометра казалось вероятным. Действие этих факторов рассмотрено теоретически, исходя из основного принципа: вносимое каждым фактором искажение результата измерений существенно в том случае, если ошибка является функцией времени, меняющейся со скоростью, сравнимой со скоростью изменения измеряемого фазового сдвига, т. е. если она приводит к искажению измерений переходного процесса. Этот принцип непосредственно следует из предназначения установки.

На основе теоретического рассмотрения сделаны некоторые практические выводы относительно требований, предъявленных к различным узлам установки. Основными из них (помимо очевидных, например необходимости наилучшего согласования всех элементов высокочастотного тракта, уменьшения модуляции усиления лампы бегущей волны, обеспечения высокой стабильности клистронного генератора, высокого качества ограничителей амплитуды и т. п.) являются следующие.

1. При конструировании кристаллического смесителя необходимо обеспечить постоянство комплексной проводимости детектора во всем диапазоне.

2. Принципиальная схема позволяет производить преобразование высокой частоты в промежуточную при повышенном уровне основного сигнала. При больших потерях основного сигнала, при изменении свойств среды в Q-промежутке, это обстоятельство имеет существенное значение.

3. Среди вредных гармоник, проникающих в тракт промежуточной частоты, наибольшую опасность представляет гармоника из-за наличия сигнала зеркальной частоты. Это обстоятельство предъявляет особые требования к усилителю промежуточной частоты.

4. Для устранения влияния изменений амплитуды входных сигналов в точном канале детектирования фазы должен быть установлен добавочный ограничитель амплитуды.

5. Если практическими способами не удается устранить вредные факторы, то можно оценить их влияние по формулам, приведенным в соответствующих параграфах статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Cumming, The serrodyne frequency translator, Proc. I. R. E., 1957, 45, 2. 175.
2. G. W. C. Mathers, Homodyne generator and detection system, IRE Wescon Convention Record, Part I. Microwaves, Antennas and Propagation, 1957.
3. E. M. Rutz, I. E. Dye, Frequency translation by phase modulation, IRE Wescon Convention Record, Part I. Microwaves, Antennas and Propagation, 1957.
4. Измерения на сверхвысоких частотах, перев. с англ. под. ред. В. Б. Штейншлейгера, Изд. Советское радио, 1952.
5. А. М. Бонч-Бруевич, В. И. Широкий, ЖТФ, 1955, 25, 10, 1825.

Поступила в редакцию
1 III 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 1

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОКУСИРОВКА ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ФОКУСИРУЮЩЕМ УСТРОЙСТВЕ ЛБВ

А. Л. Игрицкий

Предлагается новый аналитический метод определения параметров периодического фокусирующего устройства ЛБВ для оптимальной фокусировки электронного пучка. Доказывается, что предлагаемый метод обеспечивает значительно меньшую волнистость электронного пучка в периодическом устройстве, чем используемый в настоящее время метод Чена. Новый метод позволяет получить заданную правильную конфигурацию электронного пучка, которая также зависит от условий при входе электронов в периодическое устройство. Показано, что лучшие условия фокусировки получаются в случае входа электронов в периодическое поле при максимуме индукции.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее важных вопросов при конструировании периодического фокусирующего устройства ЛБВ является вопрос обеспечения малой волнистости электронного пучка. Лишь в случае малых колебаний электронов около равновесного радиуса можно добиться проведения на коллектор наибольшего процента тока катода и обеспечить минимальные значения коэффициента шума лампы.

Как показывает анализ, волнистость электронного пучка в периодическом устройстве определяется следующими тремя параметрами фокусирующего устройства: величиной максимальной индукции периодического магнитного поля B_{z0}, периодом магнитного поля L и аксиальной составляющей индукции на катоде лампы $B_{z\text{к}}$. На волнистость пучка также влияют условия входа электронов в периодическое поле.

Аналитический метод обеспечения малой волнистости пучка излагается в [1]. Однако, как будет показано ниже, этот метод не дает условий оптимальной фокусировки. В данной статье на основе анализа уравнения траектории электронов в периодическом устройстве, приведенного в [2], определяются условия оптимальной фокусировки, обеспечивающие правильную форму и малые амплитуды волнистости электронного пучка. Выводятся расчетные формулы, позволяющие определить условия оптимальной фокусировки для любых параметров ламп.

1. УПРОЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ УСТРОЙСТВЕ

Уравнение траектории электронов в периодическом фокусирующем устройстве, полученное в [2], может быть использовано для определения основных параметров этого устройства: B_{z0}, L и $B_{z\text{к}}$, при которых будет обеспечиваться оптимальная фокусировка электронного пучка. Однако для получения простых и удобных зависимостей это уравнение должно быть максимально упрощено. Расчет траектории электронов, выполненный в [2], и ряд других расчетов показывают, что главный вклад в амплитуду колебаний электронов в периодическом устройстве вносит основная гармоника колебаний в решении однородного уравнения Матье, определяемая зоной стабильности n. Амплитудный коэффициент этой гармоники равен c_n. Амплитудные коэффициенты высшей

и низшей гармоник c_{n+2}, c_{n-2} на один-два порядка меньше амплитудного коэффициента c_n. Поэтому со сравнительно небольшой погрешностью в формуле для волнистости пучка, приведенной в [2], можно пренебречь членами, содержащими коэффициенты c_{n+2} и c_{n-2}. Тогда в результате ряда несложных преобразований для волнистости δ электронного пучка получим следующее уравнение:

$$\delta(t) = \frac{b}{a}\cos\left[\sqrt{a}\,(t-t_0)\right] - \frac{q}{(\sqrt{a}-2)\sqrt{a}}\cos\left[\sqrt{a}\,(t-t_0)+2t_0\right] -$$
$$- \frac{q}{(\sqrt{a}+2)\sqrt{a}}\cos\left[\sqrt{a}\,(t-t_0)-2t_0\right] - \frac{b}{a} + \frac{2q}{a-4}\cos 2t. \qquad (1)$$

В формуле (1) величины δ и t связаны с радиальной и аксиальной координатами электрона r и z посредством соотношений

$$t = \frac{2\pi}{L}z, \qquad (2)$$

$$r = r_0(1+\delta). \qquad (3)$$

Здесь $r_0 = \text{const}$ и представляет собой значение радиуса, вблизи которого происходят малые колебания электрона.

Постоянные коэффициенты a, b и q, входящие в (1), выражаются через параметры ЛБВ и периодического магнитного поля. Из работы [2]

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{\lambda_p}\right)^2\left[\frac{B_{z0}^2}{2B_b^2} + \alpha^2 + 3\alpha^4\frac{B_{z\text{к}}^2}{B_b^2}\right], \qquad (4)$$

$$2q = \left(\frac{L}{\lambda_p}\right)^2\frac{B_{z0}^2}{4B_b^2}, \qquad (5)$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{\lambda_p}\right)^2\left[\frac{B_{z0}^2}{2B_b^2} - \alpha^2 - \alpha^4\frac{B_{z\text{к}}^2}{B_b^2}\right], \qquad (6)$$

$$\lambda_p = \frac{4\pi\sqrt{\Phi}}{\sqrt{\eta}B_b}, \qquad (7)$$

$$B_b^2 = \frac{\sqrt{2}I}{\pi\varepsilon_0\eta^{3/2}\Phi^{1/2}r_{\text{к}}^2}, \qquad (8)$$

$$\alpha = \frac{r_{\text{к}}}{r_0}. \qquad (9)$$

В этих уравнениях: Φ — потенциал второго анода электронной пушки; η — отношение заряда к массе для электрона; I — ток в электронном пучке лампы; ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума; $r_{\text{к}}$ — радиальная координата периферийного электрона на катоде, траектория которого определяет конфигурацию электронного пучка.

При выводе формулы (1) принято, что магнитное поле меняется по закону синуса:

$$B_z = B_{z0}\sin\left(\frac{2\pi}{L}z\right) \qquad (10)$$

и что крайний электрон входит в периодическое магнитное поле в точке $z = z_0$, имея радиальную координату $r = r_0$ и двигаясь параллельно оси z. В соответствии с (2) и (3) начальные условия были взяты при

$$t = t_0 = \frac{2\pi}{L}z_0, \quad \delta_0 = \delta_0' = 0.$$

В дальнейшем мы рассмотрим определение параметров периодического фокусирующего устройства для двух частных значений $t_0 = 0$ и $= \pi/2$. Первое значение t_0 соответствует случаю входа электрона в периодическое магнитное поле в точке, где индукция равна нулю, а второе — точке, где индукция равна максимуму.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ФОКУСИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ СЛУЧАЯ ВХОДА ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ ПРИ МАКСИМУМЕ ИНДУКЦИИ

Полагая в уравнении (1) $t_0 = \pi/2$, получим уравнение волнистости электронного пучка в виде

$$\delta(t) = \left[\frac{b}{a} + \frac{2q}{a-4}\right]\cos\left[\sqrt{a}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{b}{a} + \frac{2q}{a-4}\cos 2t. \qquad (11)$$

Желательно амплитуду волнистости электронного пучка иметь возможно меньшей. Рассмотрим методы, при помощи которых это может быть достигнуто.

а) Метод Чена [1]. Путем подбора соотношения между индукцией на катоде $B_{zк}$ и максимальной индукцией периодического магнитного поля B_{z0} добиваются того, чтобы коэффициент $b = 0$, а затем предельно уменьшают величину q путем выбора возможно меньшей величины периода магнитного поля L. Как видно из формул (4) и (5), с уменьшением L уменьшаются a и $2q$. При достаточно малых L $a \ll 4$ и им можно пренебречь. В итоге при $b = 0$ уравнение (11) запишется в виде

$$\delta = -\frac{2q}{4}\left\{\cos 2t + \cos\left[\sqrt{a}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (12)$$

Из формулы (12) видим, что при $q \to 0$ $\delta \to 0$, т. е. волнистость пучка может быть сделана сколь угодно малой при соответствующем уменьшении периода магнитного поля L. Из уравнений (11), (2) и (3) конфигурация электронного пучка при $b = 0$ будет описываться уравнением

$$r = r_0 + r_0\frac{2q}{a-4}\left\{\cos\left[\sqrt{a}\left(\frac{2\pi}{L}z - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \cos\left(\frac{4\pi}{L}z\right)\right\}, \qquad (13)$$

в котором $z \geqslant L/4$. В качестве примера определим конфигурацию электронного пучка $r = f(z)$ для ЛБВ, работающей в периодическом магнитном поле с индукцией $B_{z0} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *вб/м²* и периодом $L = 1{,}4$ *см*; $B_{zк} = 2{,}22 \cdot 10^{-2}$ *вб/м²*. Для этой лампы параметры, определяемые уравнениями (7) и (8), равны $\lambda_p = 7{,}75 \cdot 10^{-2}$, $B_b^2 = 0{,}89 \cdot 10^{-4}$, коэффициент η примем равным единице. В результате расчета по формулам (4) — (6) имеем $a = 0{,}396$; $q = 0{,}0533$ и $b = 0$. Для этих значений коэффициентов на рис. 1, *а* по уравнению (13) построена конфигурация электронного пучка $r = f(z)$ в случае фокусировки по методу Чена. Мы видим, что электронный пучок имеет сильно изрытую неправильную границу. Колебания крайнего электрона происходят около входного радиуса r_0 и максимальная амплитуда колебаний равна

$$A_m = \pm r_0\frac{4q}{a-4}. \qquad (14)$$

Радиус электронного пучка в периодическом устройстве может быть больше радиуса пучка на входе в устройство на величину $r_0\frac{4q}{a-4}$. Максимальное относительное изменение радиуса пучка в результате колебаний электронов равно $\frac{8q}{a-4}100\%$. По уравнению (14) с учетом

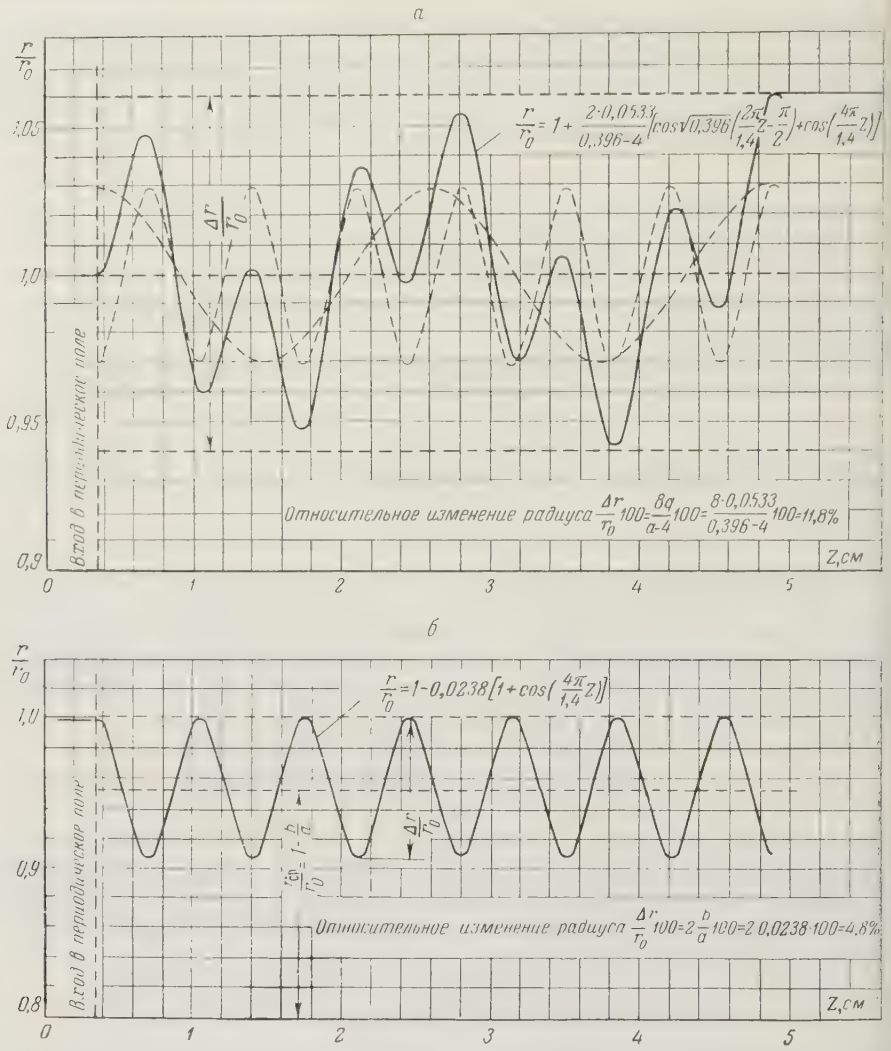


Рис. 1. Конфигурация электронного пучка $r/r_0=f(z)$ в периодическом магнитном поле $(t_0=\pi/2)$:

а — фокусировка по методу Чена; *б* — фокусировка по новому методу

формул (4) и (5) на рис. 2 построена зависимость амплитуды волнистости от периода магнитного поля в случае фокусировки по методу Чена.

б) Новый метод обеспечения малой волнистости электронного пучка. Этот метод дает лучшие результаты и состоит в следующем. Параметры периодического фокусирующего устройства B_{z0}, L и индукцию на катоде лампы $B_{z\text{к}}$ будем подбирать таким образом, чтобы в уравнении (11) исчезло первое слагаемое. Очевидно, это будет иметь место, если

$$\frac{2q}{a-4}=-\frac{b}{a}. \tag{15}$$

Волнистость электронного пучка в этом случае будет равна

$$\delta(t)=-\frac{b}{a}(1+\cos 2t)=\frac{2q}{a-4}(1+\cos 2t). \tag{16}$$

Пользуясь уравнением (16), можно показать, аналогично тому, как то сделано для метода Чена, что с уменьшением периода магнитного ия волнистость пучка стремится к нулю.

Уравнение (15) после подстановки значений из (4) — (6) будет свя-зать три параметра: B_{z0}, L и $B_{zк}$. Исходя из этого, можно произ-ьно задать два из них и из уравнения (15) определить третий. Мы робно рассмотрим случай, когда плитуда периодического магнит-го поля задана и постоянна: $B_{z0} =$ const, а индукция на катоде $B_{zк}$ жет меняться. Рассмотрим, как в м случае, в зависимости от из-

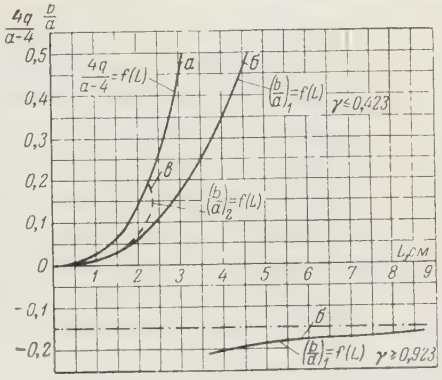


Рис. 2. Зависимость амплитуды волнистости пучка от периода магнитного поля: *а* — фокусировка по методу Чена ($4q/(a-4) = f(L)$); *б* — фокусировка по новому методу ($t_0 = \pi/2$) ($(b/a)_1 = f(L)$); *в* — фокусировка по новому методу ($t_0 = 0$) ($(b/a)_2 = f(L)$)

нения $B_{zк}$, будут меняться амплитуда волнистости пучка b/a и пери-магнитного поля L. Для сокращения записей введем обозначения

$$k = \frac{B_b^2}{B_{z0}^2}; \quad \gamma = \frac{B_{zк}^2}{B_{z0}^2}; \quad \frac{B_{zк}^2}{B_b^2} = \frac{\gamma}{k}. \tag{17}$$

С учетом (17) и формул (4) и (6) выражение b/a может быть запи-но в виде

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - 2k\alpha^2 - 2\alpha^4\gamma}{1 + 2k\alpha^2 + 6\alpha^4\gamma}. \tag{18}$$

Для заданной лампы при $B_{z0} = \text{const}$ коэффициент $k = \text{const}$. По урав-нию (18) на рис. 3 построена зависимость $b/a = f(\gamma)$. Параметры лам-и поля были указаны выше.

Рассмотрим теперь, как изменяется период магнитного поля L с из-нением γ. Для этого в уравнение (15) подставим значения вели-н из (4) — (6). Решая полученное уравнение относительно L с уче-м обозначений (17), будем иметь

$$L = \lambda_p \sqrt{\frac{8k(1 - 2k\alpha^2 - 2\alpha^4\gamma)}{(1 + 2k\alpha^2 + 6\alpha^4\gamma)(1 - k\alpha^2 - \alpha^4\gamma)}}. \tag{19}$$

На рис. 3 по уравнению (19) построена зависимость $L = f(\gamma)$. Штри-вкой показана область, в которой период магнитного поля получается имым и где, следовательно, фокусировка с использованием нового тода невозможна.

При помощи рис. 3 на рис. 2 построен график зависимости амплитуды нистости пучка от величины периода магнитного поля $(b/a)_1 = f(L)$ случае фокусировки по предлагаемому новому методу. Из рис. 2 видим, о при заданном периоде магнитного поля амплитуда волнистости пучка и фокусировке по новому методу получается примерно вдвое меньше, и при фокусировке по методу Чена.

Уравнение, описывающее конфигурацию пучка, может быть получено (2), (3), (16) и имеет вид

$$r = r_0 - r_0 \frac{b}{a}\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{L} z\right)\right], \tag{20}$$

где $z \geqslant \frac{L}{4}$. Из (20) нетрудно видеть, что для значений γ, расположенных слева от заштрихованной области на рис. 3, радиус пучка в процессе колебаний не может превосходить его величину на входе в периодическое устройство. Конфигурация электронного пучка, рассчитанная при помощи уравнений (18) — (20) для ЛБВ с вышеуказанными параметрами при мак

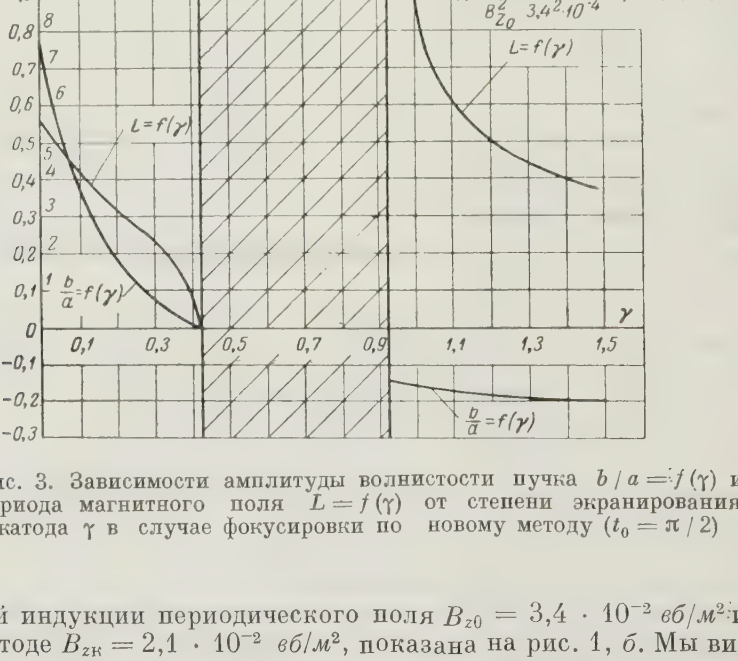


Рис. 3. Зависимости амплитуды волнистости пучка $b/a = f(\gamma)$ и периода магнитного поля $L = f(\gamma)$ от степени экранирования катода γ в случае фокусировки по новому методу ($t_0 = \pi/2$)

симальной индукции периодического поля $B_{z0} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *вб/м²* и индукции на катоде $B_{zк} = 2{,}1 \cdot 10^{-2}$ *вб/м²*, показана на рис. 1, *б*. Мы видим, что колебания крайнего электрона происходят около среднего радиуса $r_{ср} = r_0\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ и максимальная амплитуда колебаний равна $r_0 \frac{b}{a}$. Радиус электронного пучка в периодическом устройстве не может быть больше радиуса пучка на входе в устройство и этим новый метод уменьшения волнистости также выгодно отличается от метода Чена. Максимальное относительное изменение радиуса пучка в процессе колебаний, влияющее на коэффициент шума лампы, в случае использования нового метода уменьшения волнистости равно $2\frac{b}{a}$. Это изменение радиуса примерно вдвое меньше, чем при фокусировке по методу Чена.

Периодическое устройство с параметрами, рассчитанными выше, было осуществлено экспериментально. Периодическое поле создавалось при помощи кольцевых постоянных магнитов. Точное значение индукции на катоде устанавливалось при помощи электромагнита, расположенного в области электронной пушки ЛБВ. В результате испытаний этого устройства было получено токопрохождение на коллектор лампы 98%.

Мы рассмотрели фокусировку по новому методу в области малых γ. При больших γ, т. е. для области фокусировки, расположенной справа от заштрихованной области на рис. 3, b/a будет отрицательным и, следовательно, в процессе колебаний радиус пучка не может быть меньше r_0. Главным достоинством нового метода подбора параметров фокусирующего устройства при больших γ является возможность использования магнитных полей с большим периодом, однако, ввиду больших амплитуд колебаний область фокусировки с большими γ вряд ли пригодна для малошумящих ЛБВ.

Как уже указывалось выше, уравнение (15) связывает три параметра: B_{z0}, L и $B_{z\text{к}}$. Мы подробно рассмотрели случай, когда были заданы величины B_{z0} и $B_{z\text{к}}$. Период магнитного поля L и величина амплитуды волнистости пучка вычислялись по формулам (19) и (18). Однако практически часто оказываются заданными параметры периодического поля: период L и амплитуда B_{z0}. В этом случае индукция на катоде может быть найдена по формуле

$$B_{z\text{к}} = \sqrt{\gamma} B_{z0},$$

где

$$\gamma_{1,2} = \frac{-\left[c_2 - 6c_3 - 16k\left(\frac{\lambda_p}{L}\right)^2\right] \pm}{12\alpha^4}$$

$$\frac{\pm\sqrt{\left[c_2 - 6c_3 - 16k\left(\frac{\lambda_p}{L}\right)^2\right]^2 - 24\left[8k\left(\frac{\lambda_p}{L}\right)^2 c_1 - c_2 c_3\right]}}{12\alpha^4}; \qquad (21)$$

$$c_1 = 1 - 2k\alpha^2; \quad c_2 = 1 + 2k\alpha^2; \quad c_3 = 1 - k\alpha^2.$$

Формула (21) получена из (19).

Если даны индукция на катоде $B_{z\text{к}}$ и период магнитного поля L, то необходимая для фокусировки максимальная индукция периодического магнитного поля должна определяться из формулы (15). Подставляя в нее значения величин из (4), (5) и (6) и решая полученное уравнение, будем иметь

$$B_{z0} = B_b \sqrt{2x},$$

где

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\beta d_2 - \frac{1}{2}\beta d_1 - 4\right) \pm \sqrt{\left(\beta d_2 - \frac{1}{2}\beta d_1 - 4\right)^2 - 4\beta\left(4d_1 - \frac{1}{2}\beta d_1 d_2\right)}}{2\beta};$$

$$\beta = \left(\frac{L}{\lambda_p}\right)^2; \qquad d_1 = \alpha^2 + \alpha^4 \frac{B_{z\text{к}}^2}{B_b^2}; \quad d_2 = \alpha^2 + 3\alpha^4 \frac{B_{z\text{к}}^2}{B_b^2}.$$

Учитывая наличие трех подлежащих определению параметров: B_{z0}, L, $B_{z\text{к}}$ и всего лишь одного уравнения, связывающего их, можно ввести еще какое-либо дополнительное условие, например условие постоянства амплитуды волнистости пучка

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - 2k\alpha^2 - 2\alpha^4\gamma}{1 + 2k\alpha^2 + 6\alpha^4\gamma} = A = \text{const}. \qquad (22)$$

В этом случае только один из параметров может задаваться произвольно, а два других должны определяться из уравнений (15) и (22).

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВХОДА ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ ПРИ ВЕЛИЧИНЕ ИНДУКЦИИ, РАВНОЙ НУЛЮ

Если электрон входит в периодическое магнитное поле в начале периода при нулевом значении индукции, то с учетом (10) в уравнении (1) мы должны положить $t_0 = 0$. В результате будем иметь

$$\delta(t) = \left(\frac{b}{a} - \frac{2q}{a-4}\right)\cos\left(\sqrt{a}\,t\right) - \frac{b}{a} + \frac{2q}{a-4}\cos 2t. \qquad (23)$$

Следуя методу, изложенному в предыдущем параграфе, параметры фокусирующего устройства будем подбирать таким образом, чтобы в уравнении (23) исчезло первое слагаемое. Очевидно, это будет иметь место, если

$$\frac{b}{a} - \frac{2q}{a-4} = 0. \qquad (24)$$

Волнистость электронного пучка в этом случае будет равна

$$\delta(t) = -\frac{b}{a}(1 - \cos 2t). \qquad (25)$$

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим подробно определение параметров фокусирующего устройства лишь при $B_{z0} = \text{const}$. При этом будем считать, что индукция на катоде может плавно изменяться и в зависимости от нее будем определять изменение периода магнитного поля и амплитуды волнистости пучка. В данном случае амплитуда волнистости пучка по-прежнему определяется уравнением (18) и ее график для вышеуказанной лампы нанесен на рис. 4. Принималось, что $B_{z0} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *вб/м*^{2}.

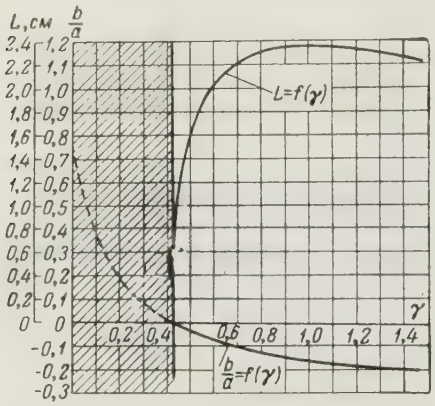


Рис. 4. Зависимости амплитуды волнистости пучка $b/a = f(\gamma)$ и периода магнитного поля $L = f(\gamma)$ от степени экранирования катода γ в случае фокусировки по новому методу ($t_0 = 0$)

Формула для периода магнитного поля получается из (24) после подстановки величин из (4) — (6) и (17):

$$L = \lambda_p \sqrt{\frac{8k(1 - 2k\alpha^2 - 2\alpha^4\gamma)}{(1 + 2k\alpha^2 + 6\alpha^4\gamma)(k\alpha^2 + \alpha^4\gamma)}}. \qquad (26)$$

На рис. 4 по уравнению (26) построена зависимость $L = f(\gamma)$. Штриховкой показана область, в которой период магнитного поля получается мнимым и, следовательно, фокусировка по новому методу невозможна. На рис. 2 при помощи рис. 4 пунктиром построен график изменения ампли-

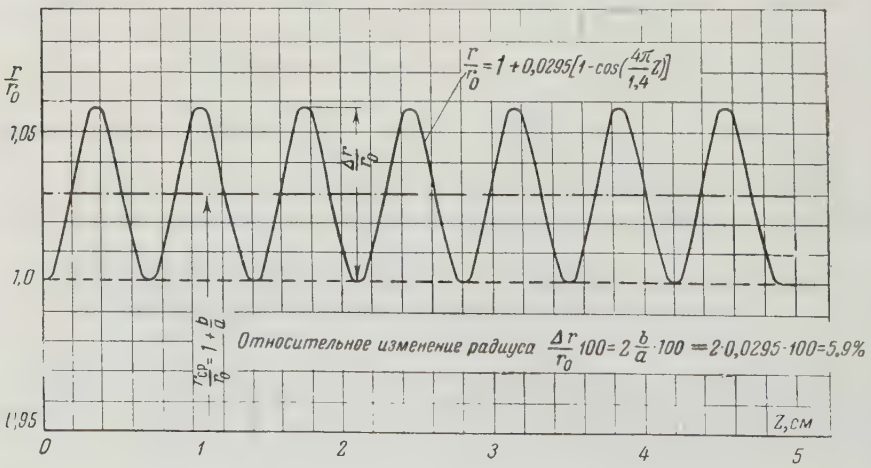


Рис. 5. Конфигурация электронного пучка $r/r_0 = f(z)$ в периодическом магнитном поле в случае фокусировки по новому методу ($t_0 = 0$)

туды колебаний от периода магнитного поля $(b/a)_2 = f(L)$. Сопоставляя кривые, видим, что при малых значениях L и в данном случае нарастание амплитуды колебаний с ростом периода получается более медленным, чем при фокусировке по методу Чена. С учетом уравнений (2), (3) и (25) кон-

игурация пучка в данном случае будет определяться уравнением

$$r = r_0 - r_0 \frac{b}{a}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{L}\, z\right), \qquad (27)$$

де $z \geqslant 0$.

На рис. 5 показана конфигурация электронного пучка, вычисленная по уравнениям (18), (26) и (27) для ЛБВ с вышеуказанными параметрами при максимальной индукции периодического поля $B_{z0} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ *вб/м*^{2} и индукции на катоде $B_{zк} = 2{,}36 \cdot 10^{-2}$ *вб/м*^{2}. Мы видим, что колебания крайнего электрона происходят около среднего радиуса $\left(r_{ср} = r_0\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right.$ и максимальная амплитуда колебаний равна $r_0 \frac{b}{a}$. Радиус электронного пучка в периодическом устройстве не может быть меньше радиуса пучка на входе в устройство. Это свидетельствует о том, что в данном случае фокусировка получается хуже, чем в случае входа электронов в поле при максимуме индукции, так как более вероятно попадание электронов на спираль. Кроме того, из рис. 2 мы видим, что амплитуда колебаний с ростом L в данном случае нарастает быстрее. Максимальное относительное изменение радиуса пучка в процессе колебаний равно $2\frac{b}{a}$. Это изменение радиуса при малых значениях периода магнитного поля примерно вдвое меньше, чем при фокусировке по методу Чена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый новый метод определения параметров периодического фокусирующего устройства ЛБВ для оптимальной фокусировки электронного пучка отличается от применяемого в настоящее время аналитического метода Чена. В методе Чена используется условие $b = 0$, в новом же методе при выборе параметров фокусирующего устройства используется условие $\frac{b}{a} \pm \frac{2q}{a-4} = 0$. В результате новый метод дает ряд преимуществ. Основные из них следующие.

1. Обеспечивается значительно меньшая волнистость электронного пучка в фокусирующем устройстве, что является особенно важным при создании малошумящих ламп бегущей волны.

2. Метод дает возможность получить заданную правильную конфигурацию электронного пучка. При этом: а) в случае входа электронного пучка в периодическое поле при максимуме индукции радиус электронного пучка в процессе колебаний электронов в периодическом устройстве не может быть больше радиуса пучка на входе в устройство (см. рис. 1, *б*). Это обстоятельство должно облегчить наладку фокусирующего устройства за счет увеличения зазора между пучком и спиралью ЛБВ; б) при входе электронного пучка в периодическое поле при нуле индукции радиус электронного пучка, наоборот, не может быть меньше радиуса r_0 (см. рис. 5).

3. Для обеспечения условий лучшей фокусировки при пользовании новым методом определения параметров фокусирующего устройства следует стремиться к тому, чтобы вход электронов в периодическое поле обеспечивался при максимуме индукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. K. N. Chang, Beam focusing by periodic and complementary fields, Proc. I. R. E., 1955, 43, 1, 62.
2. А. Л. Игрицкий, Расчет траекторий электронов в периодическом фокусирующем устройстве ЛБВ, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 2, 255.

Поступила в редакцию
5 VIII 1959

1961 № 1

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВТОРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ НА ПРОСТРЕЛ ЭМИТТЕРОВ ИЗ ОКИСИ МАГНИЯ

Н. Л. Яснопольский, Н. А. Карелина, В. С. Малышева

Описан эмиттер вторичных электронов, работающий на прострел. Рассмотрена вторичная эмиссия на прострел пленок алюминия толщиной 100—1000 Å и построенных на них эффективных эмиттеров из MgO. Показано, что уменьшение толщины слоя Al от 3000 до 350 Å позволяет понизить рабочее напряжение с 11—18 до 3—4 *кв* при значениях коэффициента вторичной эмиссии порядка 5—8. Отмечено, что на таких эмиттерах вторичная электронная эмиссия на прострел в некоторых условиях может перейти в самоподдерживающуюся эмиссию.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование вторичной электронной эмиссии на прострел с целью создания эффективных эмиттеров в последнее время привлекает к себе пристальное внимание. Для создания эмиттеров, работающих на прострел, используются вещества, обладающие высокой вторичной электронной эмиссией на отражение.

Е. Штернгласс [1] описал эмиттеры, состоящие из слоя KCl (эффективный эмиттер) толщиной ~600 Å с проводящим подслоем Au 15—25 Å и опорным слоем SiO толщиной 100 Å, нанесенным на мелкоструктурную сетку. Такие эмиттеры дают коэффициент вторичной электронной эмиссии $\sigma_{макс} \simeq 8{,}4$ при энергии первичных электронов $V_p = 3{,}2$ *кэв*. Однако эмиттеры из KCl при работе на прострел, так же как и при работе на отражение, обнаруживают уменьшение σ во времени под действием электронной бомбардировки, обусловленное образованием центров окраски.

А. И. Пятницкий [2] получил сурьмяно-цезиевые эмиттеры, работающие на прострел (толщина слоя сурьмы 400Å), на свободной стеклянной пленке толщиной 7500Å. Такие эмиттеры давали $\sigma \simeq 2{,}7$ при $V_p = 20$ *кэв* при расчете на первичный ток, падающий на стеклянную подложку , и $\sigma_{макс} = 4{,}7$ при $V_p = 16$ *кэв* при расчете на ток, прошедший сквозь стеклянную подложку.

Е. А. Красовский [3] сделал сообщение о сурьмяно-цезиевом эмиттере на металлической подложке, дающем $\sigma_{макс} = 7$.

Представляется, что наиболее интересным веществом для создания вторично-электронного эмиттера на прострел является MgO. Эмиттеры из MgO при работе на отражение показывают наиболее высокие коэффициенты вторичной электронной эмиссии $\sigma = 16 - 24$. Они обладают наибольшей устойчивостью по сравнению с другими известными эмиттерами, выдерживая нагрузку 5 *ма/см*^{2} при $V_p = 300$ *эв* в течение 800 *час* [5].

В. Г. Буткевич и М. М. Бутслов [4] создали эмиттеры, работающие на прострел, из MgO на свободной проводящей пленке Al толщиной ~3000 Å. Такие эмиттеры при толщине слоя MgO 0,19 *мг/см*^{2} давали $\sigma_{макс} = 3{,}2$ при $V_p = 13$ *кэв* и при толщине 0,73 *мг/см*^{2} $\sigma_{макс} = 8$ при $V_p = 18$ *кэв*. Можно предполагать, что высокие энергии первичных

лектронов, необходимые для работы этих эмиттеров, обусловлены ольшими потерями энергии первичных электронов и самих первичных лектронов при прохождении через сравнительно толстую металличе- кую подложку.

Нами были построены эффективные эмиттеры из MgO с алюминиевой одложкой на мелкоструктурной сетке. Это дало возможность уменьшить олщину подложки на порядок и получить высокие значения σ на прострел ри значительно меньших энергиях первичных электронов.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Исследование эмиттеров производилось на разборной вакуумной уста- овке под колпаком с резиновым уплотнением при откачке паромасляным асосом. Ловушка охлаждалась жидким азотом. Измерения выполнялись ри вакууме порядка 10^{-6} *мм* рт. ст.

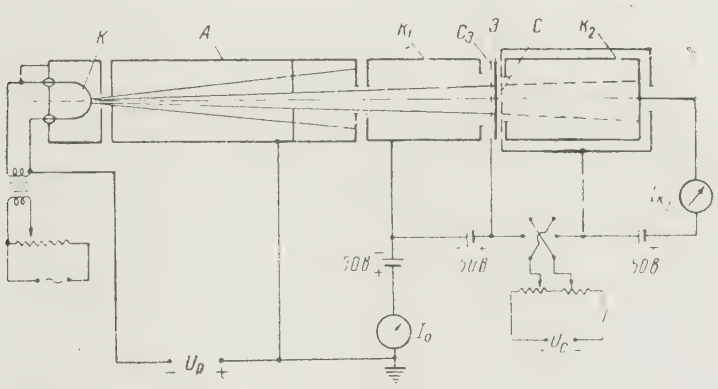


Рис. 1. **Принципиальная схема измерительного устройства и схема измерений:**

K — катод; *A* — анод; K_1 — коллектор отраженных первичных электронов и вторичных электронов на отражение; *Э* — эмиттер вторичных электронов; $C_э$ — сетка — основа эмиттера; *C* — сетка, отсасывающая вторичные электроны на прострел; K_2 — коллектор прошедших сквозь эмиттер первичных и вторичных электронов на прострел

Принципиальная схема измерительного прибора и схема измерений ображены на рис. 1. Электронный прожектор простейшей конструкции стоит из вольфрамового катода *K* и анода *A*. Диафрагмы анода произ- дят геометрическое вырезывание луча и задают его диаметр, что поз- ляет легко определять среднюю плотность тока в луче. Энергия первич- х электронов V_p задается ускоряющим напряжением U_p на прострел, икладываемым между катодом и анодом. При такой конструкции сред- яя плотность тока в луче растет с ускоряющим напряжением. В наших мерениях она не превышала 10^{-6} *а/см*^{2}. Поле, отсасывающее вторичные ектроны, задается разностью потенциалов между подложкой эмиттера и сеткой *C*. Сетка *C* с проницаемостью 95% укреплена на цилиндре, анирующем коллектор K_2 от попадания рассеянных электронов. Кол- ктор вторичных электронов на прострел K_2 выполнен в виде ловушки радея; его внутренняя поверхность зачернена аквадагом для снижения эффициента отражения и вторичной эмиссии с поверхности коллектора. жду сеткой *C* и коллектором K_2 приложена разность потенциалов *в*, возвращающая обратно вторичные электроны, выбитые из коллекто- Расстояние сетки *C* от эмиттера составляет 3*мм*, диаметр луча на по- хности мишени 6 *мм*. Коэффициент вторичной эмиссии σ вычислялся

с учетом проницаемости α сетки $C_э$ по формуле

$$\sigma = \frac{I_{к_2}}{I_0 \alpha} = \frac{I_{к_2}}{I_p},$$

где $I_{к_2}$ — ток в цепи коллектора вторичных электронов; I_0 — ток в луче; I_p — ток первичных электронов на свободную поверхность пленки.

Таким образом, нами, как и упомянутыми выше авторами, определялась величина полного коэффициента вторичной эмиссии, так как ток $I_{к_2}$ включает в себя как истинно вторичные, так и проходящие сквозь пленку первичные электроны.

2. ВТОРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ НА ПРОСТРЕЛ ТОНКИХ ПЛЕНОК Al

Слои алюминия изготовлялись напылением в вакууме на мелкоструктурную медную или вольфрамовую сетку с предварительно нанесенной на нее органической пленкой. Удаление органической пленки производилось путем выжигания в вакууме при температуре 250° С и давлении порядка нескольких миллиметров ртутного столба. Толщина слоя Al прибли-

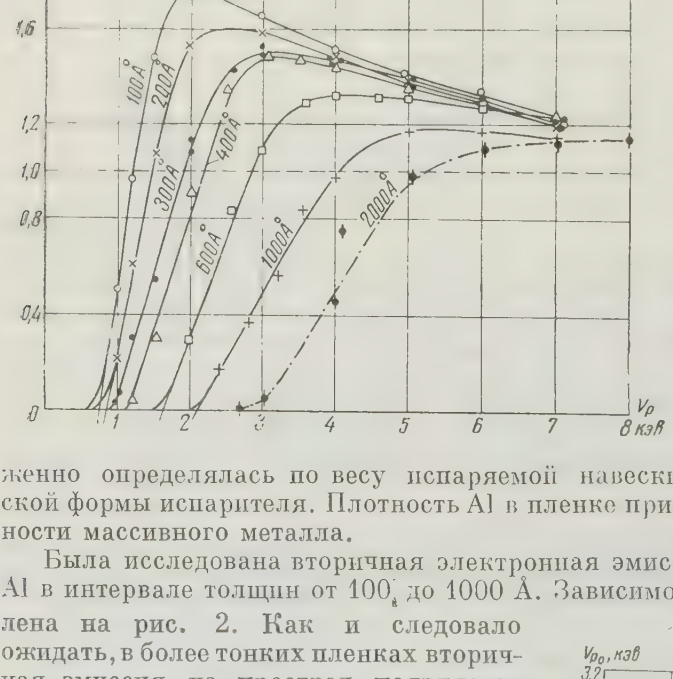


Рис. 2. Кривые зависимости $\sigma = f(V_p)$ для пленок Al разных толщин. Штрих-пунктирная кривая — данные работы [4]

женно определялась по весу испаряемой навески, исходя из сферической формы испарителя. Плотность Al в пленке принималась равной плотности массивного металла.

Была исследована вторичная электронная эмиссия на прострел слоев Al в интервале толщин от 100 Å до 1000 Å. Зависимость $\sigma = f(V_p)$ представлена на рис. 2. Как и следовало ожидать, в более тонких пленках вторичная эмиссия на прострел появляется при меньших значениях V_p, быстрее возрастает и в максимуме достигает больших значений, чем в случае

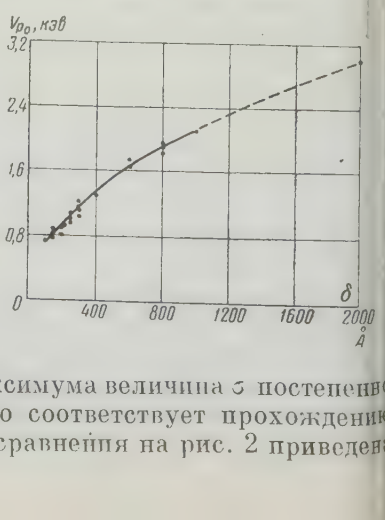


Рис. 3. Зависимость энергии начала прострела пленки от толщины слоя Al. Точка, соответствующая 2000 Å, — данные работы [4]

более толстых пленок. После достижения максимума величина σ постепенно спадает, стремясь в пределе к единице, что соответствует прохождению электронов сквозь пленку без потерь. Для сравнения на рис. 2 приведен

ривая для δ=2000 Å, взятая из работы [4]; она хорошо ложится в по-
ученный нами ряд кривых.

Энергия первичных электронов V_{p_0}, соответствующая началу про-
грела, приближенно определялась по точке пересечения прямолиней-
ого участка кривой $\sigma = f(V_p)$ с осью абсцисс. Зависимость $V_{p_0} = f(\delta)$,
де δ — толщина слоя, изображена на рис. 3.

В исследованной области толщин энергия начала прострела V_{p_0} ле-
ит в пределах от 0,7 до 2,2 *кэв*. Точка для δ = 2000 Å хорошо ло-
тся на полученную нами кривую.

3. ВТОРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ НА ПРОСТРЕЛ СЛОЕВ MgO

Эффективные эмиттеры из MgO изготовлялись нами на пленках
Al толщиной 350—400 Å. Нанесение слоя MgO производилось путем
жигания Mg на воздухе и осаждения «дыма» MgO на образец. При
том, как известно, образуется рыхлый слой MgO. Толщина его оце
ивалась по приросту веса образца после
анесения слоя.

Исследования таких эмиттеров пока-
али, что их прогрев в вакууме при 450°C
едет к возрастанию σ. Зависимость σ =
$= f(V_p)$ для пленки Al с нанесенным на
ее слоем MgO до и после прогрева ясна
из рис. 4. Величина коэффициента σ про-
ретого эмиттера достигает ~7 при $V_p = 3$
эв и $\sigma_{макс} \simeq 9$ при $V_p = 5$ *кэв*. Следует
тметить, что такие эмиттеры при исполь-
уемых плотностях тока обнаруживают
заметное уменьшение σ во времени под
йствием электронной бомбардировки.

Нами были исследованы также эмит-
еры, уплотненные после нанесения слоя
MgO посредством обработки в парах
етучей жидкости. Такие эмиттеры обла-
дают меньшими значениями σ, но более
стойчивы под нагрузкой. На рис. 5 пока-
зана зависимость $\sigma = f(V_p)$ для алюминие-
вой подложки и построенного на ней эмит-
тера с различной толщиной слоя MgO.

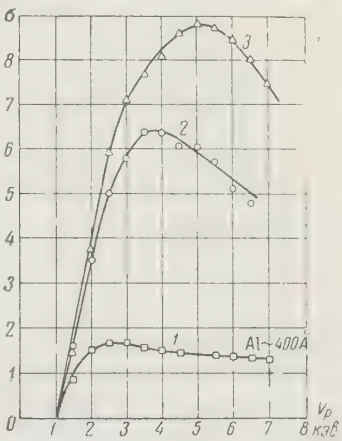


Рис. 4. Кривые зависимости $\sigma = f(V_p)$ для слоя Al толщиной 400Å (1) и построенного на нем эмиттера из MgO толщиной 0,05 *мг/см²* до прогрева (2) и после него (3)

Изменение толщины слоя производилось путем последовательного нане-
сения MgO на один и тот же образец. После каждого нанесения произво-
дились уплотнение и прогрев эмиттера. Кривые показывают, что увеличе-
ние слоя MgO вплоть до 0,19 *мг/см²* практически не увеличивает энергии
начала прострела, которая равна примерно 1 *кэв*. Увеличение толщины
слоя MgO приводит к возрастанию σ и сдвигу максимума кривой $\sigma = f(V_p)$
в сторону бо́льших энергий первичных электронов.

Зависимость σ от толщины слоя, полученная на ряде образцов в интер-
вале от 0,016 до 0,19 *мг/см²*, показана на рис 6. Значения толщины отло-
жены по оси абсцисс как в миллиграммах на квадратный сантиметр, так
и в микронах. Пересчет производился в предположении, что плотность
слоя равна 3,2 *г/см³*, что соответствует плотным слоям MgO; полученные
нами пленки, хотя и уплотненные, возможно, имели бо́льшую толщину.
Кривые показывают, что в исследованном интервале толщин σ монотонно
возрастает с толщиной. Для наибольшей исследованной толщины достиг-
нутые значения σ составляют при $V_p = 3$ *кэв* ~ 5 и $\sigma_{макс} \simeq 7$. Интересно от-
метить, что данная толщина MgO по крайней мере на порядок превышает
глубину выхода вторичных электронов для плотных слоев MgO (δ = 800 Å).

указанную Н. Р. Веттеном и А. Б. Лепонским [5]. Наблюдаемое явление, по-видимому, связано с пористостью пленки.

На рис. 7 приведены кривые $\sigma = f(V_p)$ для образца, показавшего наибольшие значения σ. Для оценки эффективности полученных нами результатов на этом рисунке, так же как и на рис. 5, штрих-пунктирными кривыми нанесены результаты, полученные В. Г. Буткевичем и М. М. Бутсловым [4] на аналогичных эмиттерах, отличающихся на порядок боль-

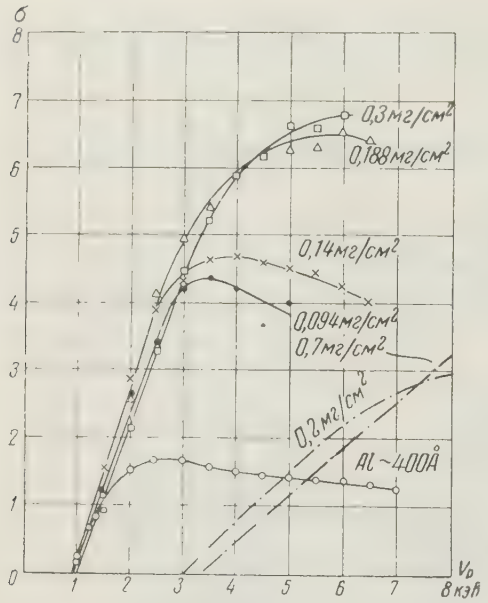


Рис. 5

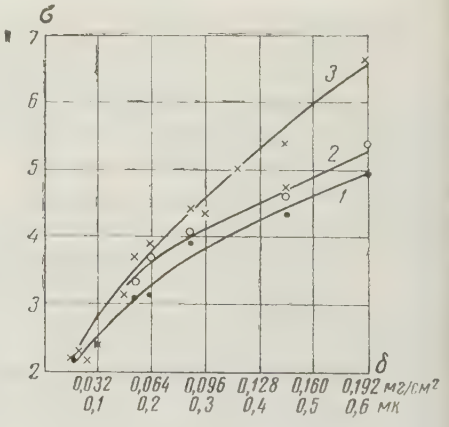


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость $\sigma = f(V_p)$ для пленки Al и построенного на ней эмиттера с уплотненными и прогретыми слоями MgO различной толщины. Штрих-пунктирные кривые — данные работы [4]

Рис. 6. Зависимость коэффициента σ на прострел от толщины слоя MgO для уплотненных прогретых эмиттеров при $V_p = 3$ *кэв* (*1*); при $V_p = 3{,}5$ *кэв* (*2*); при V_p, соответствующем максимальным значениям σ (*3*)

шей толщиной алюминиевой подложки. Сравнение показывает, что уменьшение толщины подложки позволяет уменьшить энергию V_{p_0}, требуемую для прострела эмиттера, с 3—3,5 до 1—1,5 *кэв* и получить высокие значения σ на прострел порядка 5—8 при $V_p = 3$—4 вместо 11—18 *кэв*.

4. САМОПОДДЕРЖИВАЮЩАЯСЯ ЭМИССИЯ НА ПРОСТРЕЛ

Указанные выше результаты получены при разности потенциалов U_c отсасывающей вторичные электроны, равной 50 *в*. Было обнаружено, что для уплотненных образцов насыщение кривых $\sigma = f(U_c)$ практически наступает при $U_c = 30$ *в*, и дальнейшее повышение U_c вплоть до 450 *в* практически не изменяет вторичного тока. На неуплотненных образцах при $U_c > 30$ *в* наблюдается небольшое монотонное возрастание вторичного тока с возрастанием отсасывающей разности потенциалов.

На некоторых неуплотненных образцах при U_c порядка 120—170 *в* наблюдаются самопроизвольное возрастание тока вторичной эмиссии и самоподдерживающаяся эмиссия по выключении тока луча. Зависимость тока эмиссии на прострел от отсасывающей разности потенциалов для пленки толщиной 0,12 *мг/см²* при $V_p = 6$ *кэв* показана на рис. 8. Соответствующие значения σ отложены в логарифмическом масштабе. При повы-

нении отсасывающей разности потенциалов, когда U_c достигает 170 *в*, происходит самовозрастание тока (кривая *1*) до величины, примерно в 900 раз превышающей первичный ток (I_p). При этом величина тока ограничивается падением напряжения на включенном в цепь коллектора сопротивлении (2 *Мом*). При понижении напряжения (кривая *2*) от 170 до 40 *в* ток практически не меняется, но затем начинает уменьшаться. Од-

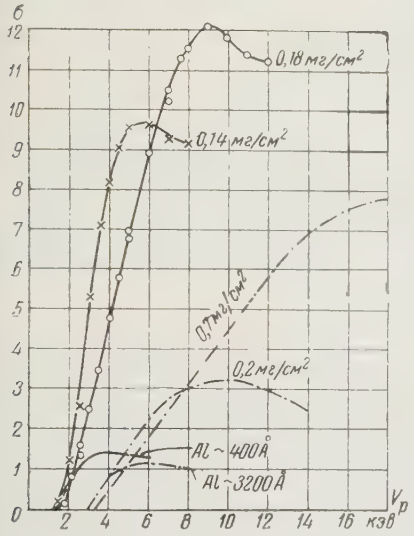


Рис. 7

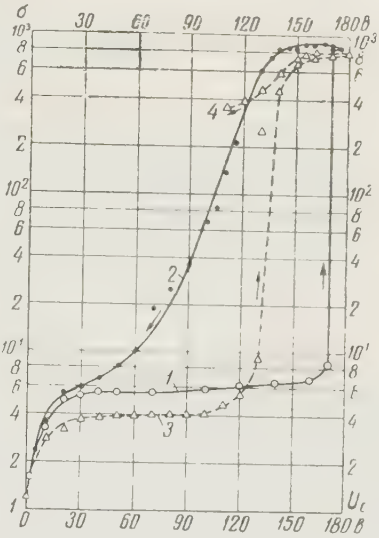


Рис. 8

Рис. 7. Зависимость $\sigma = f(V_p)$ для образца эмиттера, давшего наибольшие значения σ. Штрих-пунктирные кривые — данные работы [4]

Рис. 8. Зависимость отношения тока эмиссии на прострел к току луча первичных электронов от отсасывающей разности потенциалов U_c
1 — при увеличении U_c; *2* — при уменьшении U_c; *3* — при повторном увеличении U_c; *4* — при уменьшении U_c по выключении тока луча

нако кривая при обратном ходе идет значительно выше, чем первоначальная кривая до самовозрастания, и возвращается к нормальным значениям у примерно при $U_c = 30$ *в*. Повторное увеличение отсасывающей разности потенциалов (кривая *3*) приводит снова к самовозрастанию тока до величины порядка 800 I_p. По выключении тока первичного луча ток эмиссии продолжает протекать. Уменьшение отсасывающей разности потенциалов (кривая *4*) после выключения тока луча приводит к уменьшению тока самоподдерживающейся эмиссии и к срыву ее при некотором значении U_c. Интересно отметить, что в отсутствие стабилизирующего сопротивления в цепи выключение тока луча не только не вызывает исчезновения тока эмиссии, но, наоборот, приводит к значительному увеличению тока (в полтора — два раза).

В начале исследования данного образца самоподдерживающаяся эмиссия является относительно стабильной и возбуждается легко. Однако в процессе исследования наблюдаются частичные или полные срывы самоподдерживающейся эмиссии с последующим самовосстановлением, обладающим заметной инерционностью. С течением времени процесс самовосстановления затрудняется и в конце концов прекращается. Это, по-видимому, связано с ухудшением вторично-эмиссионных свойств слоя MgO со временем.

Представляется, что причиной самовозрастания тока и перехода в самоподдерживающуюся эмиссию, как на это указывалось в [6], является

развитие самостоятельного разряда в твердом диэлектрике. При этом ударная ионизация приводит к увеличению тока либо за счет образования лавин [7], либо за счет перераспределения поля в слое, результатом чего является возникновение большого тока вследствие туннельной эмиссии из подложки [8].

ВЫВОДЫ

1. Получен эффективный эмиттер вторичных электронов, работающий на прострел, из слоя MgO с тонким проводящим слоем Al на мелкоструктурной сетке.

2. Показано, что уменьшение толщины проводящего слоя такого эмиттера примерно с 3000 до 350 Å позволяет уменьшить потери энергии первичных электронов и самих первичных электронов в проводящем слое и в результате уменьшить рабочие напряжения эмиттера с 11—18 до 3—4 *кв* при коэффициенте вторичной электронной эмиссии $\sigma = 5—8$.

3. Обнаружено, что на таких эмиттерах с неуплотненным слоем MgO в некоторых условиях наблюдается переход вторичной эмиссии на прострел в самоподдерживающуюся эмиссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. J. Sternglass, M. M. Wachtel, IRE Trans. Nucl. Sci., 1956, 3, 4, 29.
2. А. И. Пятницкий, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1958, 22, 4, 464.
3. Е. А. Красовский, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1958, 22, 4, 472.
4. В. Г. Буткевич, М. М. Бутслов, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 3, 355.
5. N. Rey Wetten, A. B. Laponsky, J. Appl. Phys., 1959, 30, 3, 432.
6. Д. В. Зернов, Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1950, 6, 866.
7. H. Jacobs, J. Freely, F. A. Brand, Phys. Rev., 1952, 88, 3, 492.
8. М. И. Елинсон, Д. В. Зернов, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 1, 75.

Поступила в редакцию
15 VI 1960

1961 № 1

К ТЕОРИИ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ФЛЮКСМЕТРА В ПЛАЗМЕ

Я. М. Шварц

Рассмотрены радиотехнические методы повышения отношения сигнал/помеха на выходе электростатического флюксметра при использовании его для измерений в плазме. Показано, что при введении в схему синхронного детектора и использовании обратной связи по постоянному напряжению это отношение существенно повышается. Приведены расчетные соотношения. Произведена оценка предельного значения отношения сигнал/помеха на выходе флюксметра.

ВВЕДЕНИЕ

До недавнего времени приборы для измерения электростатического оля применялись только в среде с малой электропроводностью. Поэтому ри создании теории этих приборов не рассматривались следствия нали ия токов проводимости. Между тем модулированные экранной пластиной лектростатического флюксметра токи проводимости, протекая по на рузке электростатического генератора, создают на ней падение напря кения, которое является напряжением помехи. Рассмотрению методов орьбы с напряжением помехи, возникающим на входе прибора для изме ения напряженности электростатического поля, при использовании его для измерений поля у поверхности тел, помещенных в особую ионизи ованную среду — ионосферную плазму, посвящена работа [1]. Однако в этой работе некоторые вопросы рассмотрены конспективно, в особенности радиотехнические методы повышения отношения напряжения сигнала к напряжению помехи на выходе прибора.

Сущность работы электростатического флюксметра и причины, приво ящие к появлению напряжения помехи, обсуждены в работах [1, 2]. Поэтому, не останавливаясь на этом, перейдем к существу вопроса.

1. УРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА И ЕГО УПРОЩЕНИЕ

Эквивалентная схема электростатического генератора с учетом тока помехи представлена на рис. 1,*а*. Применяя закон Кирхгофа, можно получить уравнение, связывающее напряжение u на нагрузке z с протекающим по ней током i. Обычно нагрузка в электростатических генераторах представляет собой соединенные параллельно сопротивление R и переменную емкость C. В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{du}{dt} + \left(\frac{dC}{dt} R + 1\right)\frac{u}{RC} = \frac{i}{C}. \qquad (1)$$

Анализ уравнения в общем виде чрезвычайно громоздок и сложен, так как помимо учета изменения емкости потребуется учесть возможность шунтирования сопротивления R средой *.

* Эффект шунтирования при использовании прибора для работы в ионосферной плазме проявляется в том, что изменение потенциала измерительной пластины из-за падения напряжения на нагрузке, создаваемого токами сигнала и помехи, приводит к появлению дополнительного тока помехи и изменению напряженности поля у поверхности измерительной пластины. Для учета этого следовало бы ввести некоторое дополнительное, шунтирующее нагрузку сопротивление R', величина которого зависит от u.

Необходимо рассмотреть поэтому, какие упрощения можно внести в расчетную схему.

Во-первых, всегда можно подобрать такую величину сопротивления нагрузки, которая значительно меньше величины сопротивления шунтирования. Для этого необходимо, чтобы падение напряжения, создаваемое на нагрузке токами помехи и сигнала, было значительно меньше потенциала поверхности тела в месте расположения измерительной пластины электростатического флюксметра. Потенциал поверхности тела определяется по отношению к потенциалу среды вблизи тела.

Во-вторых, для ряда практически существующих конструкций выполняются неравенства

$$\frac{dC}{dt} R \ll 1, \tag{2}$$

$$\frac{C_\sim}{C_0} \ll 1 \tag{3}$$

при условии $C = C_0 + C_\sim$, где C_0 среднее значение емкости; $C_\sim$ — переменная часть емкости.

Физически выполнение условия (2) означает пренебрежение изменением постоянной времени нагрузки в течение цикла работы электростатического флюксметра, а выполнение условия (3) означает принятие значения емкости постоянным.

Анализ упрощается, если принять, что изменение потенциала измерительной пластины электростатического флюксметра, обусловленное падением напряжения на нагрузке при протекании по ней одного из токов, не влияет на значение другого. Тогда рассмотрение влияния токов помехи на работу электростатического генератора можно провести отдельно. В действительности это осуществляется при правильном подборе нагрузки электростатического генератора, т. е. в том случае, если падение напряжения, создаваемое токами помехи и сигнала, значительно меньше потенциала поверхности тела в месте расположения измерительной пластины. Практически это выполнимо, так как потенциалы спутников и ракет измеряются вольтами [3] и достаточно иметь сопротивление $R < 10^4$ *ом* для того, чтобы падение напряжения на z, создаваемое токами помехи, было бы по крайней мере на два порядка меньше значения потенциала поверхности [1]. Падение напряжения на нагрузке, обусловленное рабочими токами, обычно никогда не превышает тысячных долей вольта.

Обозначим полезный рабочий ток электростатического генератора, связанный с наличием электростатического поля E у поверхности измерительной пластины, через i_1 и соответствующее ему напряжение на нагрузке u_1. Ток помехи, текущий по нагрузке z, обозначим через i_2 и напряжение помехи u_2.

С учетом вышеизложенного уравнение (1) можно привести к следующим двум уравнениям:

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{RC} = \frac{i_1}{C}, \quad \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{RC} = \frac{i_2}{C}.$$

Суммарное напряжение на нагрузке равно

$$u_1 + u_2 = u.$$

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТОКАМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

Пусть экспонируемая в поле площадь измерительной пластины S изменяется по линейному закону, как это часто бывает на практике. Тогда в период открывания измерительной пластины $S = at$, а в период закрывания $S = S_0 - at$.

Изменение площади пластины во времени показано на рис. 1, *б*. Очевидно, если значение электростатического поля у поверхности пластины

равно E, диэлектрическая проницаемость среды равна ε, а частота экранирования равна f, то значение рабочего тока i_1 определяется формулой

$$i_1 = \frac{\varepsilon E}{4\pi}\frac{dS}{dt} = \pm\frac{\varepsilon E S_0 f}{2\pi}.$$

Поскольку ток помехи создается током, текущим на открытую часть измерительной пластины, и в первом приближении можно считать, что часть измерительной пластины, экспонированной в поле, равна той части пластины, на которую течет ток помехи (для потоков частиц, вертикально падающих на измерительную пластину, это выполняется идеально), то его значение можно определить из следующего равенства:

$$i_2 = j_2 S,$$

где j_2 — плотность тока помехи.

График изменения токов сигнала и помехи во времени представлен на рис. 1,*б*. Очевидно, что ток помехи сдвинут на 90° относительно тока сигнала.

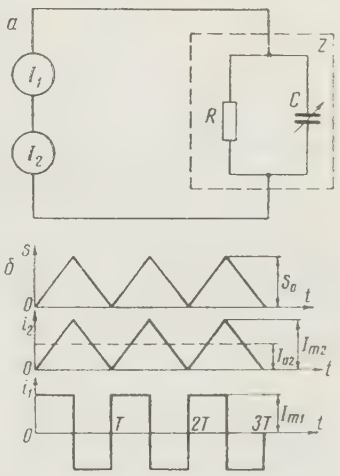


Рис. 1

а — эквивалентная схема электростатического генератора, I_1 и I_2 — генераторы токов сигнала и помехи; *б* — изменение площади измерительной пластины и токов генератора во времени

Суммарное напряжение u на нагрузке z должно явиться результатом воздействия прямоугольных импульсов рабочего тока и треугольных импульсов тока помехи на цепь z. Представив выражения для токов сигнала и помехи в виде рядов Фурье и обозначив постоянную составляющую тока помехи I_{02}, а экстремальные значения токов сигнала и помехи I_{m1} и I_{m2} соответственно, получим следующие выражения для напряжений на нагрузке z:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}\sin(n\omega t + \varphi_n),$$

$$u_2 = U_{02} - \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}\cos(n\omega t + \varphi_n),$$

где

$$u_{1n} = \frac{4I_{m1}R}{\pi n\sqrt{n^2R^2\omega^2C^2+1}};$$

$$u_{2n} = \frac{8I_{m2}R}{\pi^2 n^2\sqrt{n^2R^2\omega^2C^2+1}};$$

$$U_{02} = I_{02}R; \quad \varphi_n = \operatorname{arc\,tg} nR\omega C;$$

$$\omega = 2\pi f; \quad n = 1, 3, 5, 7, \ldots.$$

Анализ приводит к следующим выводам.

1. Сдвиг фаз между соответственными гармониками напряжений u_1 и u_2 остается равным сдвигу фаз между токами i_1 и i_2.

2. Форма напряжений u_1 и u_2 изменяется по сравнению с формой токов i_1 и i_2.

3. Удельный вес первых гармоник в напряжениях u_1 и u_2 возрастает по сравнению с удельным весом соответственных гармоник в токах i_1 и i_2, так как сопротивление нагрузки зависит от частоты и уменьшается с увеличением последней.

Для выбора эффективного средства борьбы с помехой необходимо хотя бы ориентировочно определить отношение напряжения сигнала к напряжению помехи на выходе электростатического генератора, т. е. на входе измерительной схемы. Приближенно это отношение определяется отношением амплитуд первых гармоник напряжений сигнала и помехи

$$m \simeq \pi \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{Ef}{2j_2}.$$

Воспользовавшись данными, приведенными в работах [1, 2], и подставив значения $E = 1$ *в/см*, $f = 1500$ *гц* и $j_2 = 10^{-7}$ *а/см*^{2}, вычисленные при помощи этих данных, получим, что при использовании прибора для измерений в ионосферной плазме значение m может падать приблизительно до 1/100. Это означает, что для выбранных значений E, f, j_2 входное напряжение, создаваемое током помехи, в 100 раз превышает среднее ожидаемое входное сигнальное напряжение. Само собой разумеется, что для измерения напряжения сигнала с заданной степенью точности помеху нужно подавить значительно более чем в 100 раз.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИНХРОННОГО ДЕТЕКТОРА

Анализ решения уравнения работы электростатического генератора с учетом тока помехи приводит к выводу, что соответственные гармоники напряжений помехи и сигнала на выходе генератора сдвинуты между собой на 90°. Следовательно, введение фазочувствительного элемента в измерительную схему позволит сильно подавить один из сигналов.

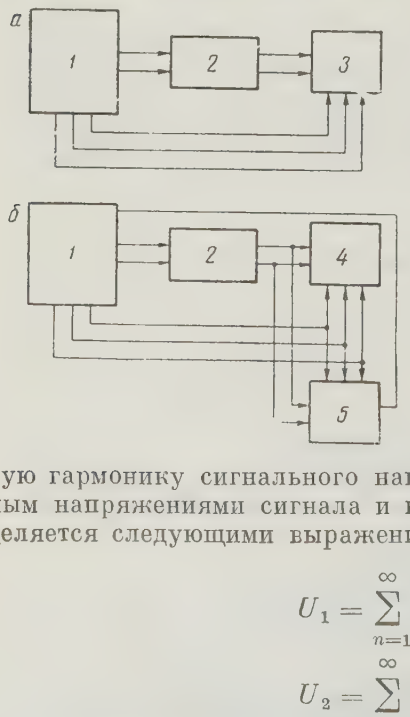


Рис. 2. Блок-схема прибора:

а — с синхронным детектором; *б* — с отрицательной обратной связью: *1* — электростатический генератор, генератор коммутирующего напряжения; *2* — усилитель; *3* — синхронный детектор; *4* — основной синхронный детектор; *5* — дополнительный синхронный детектор

Таким элементом является синхронный детектор, обычно применяемый в измерительных схемах электростатических флюксметров [4]. Действительно, при выполнении прибора по блок-схеме, представленной на рис. 2, *а*, и настройке синхронного детектора на первую гармонику сигнального напряжения связь между входным и выходным напряжениями сигнала и помехи (для идеального детектора) определяется следующими выражениями:

$$U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{1n} k(nf_1) \cos \Delta\psi_n}{n},$$

$$U_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{2n} k(nf_1) \sin \Delta\psi_n}{n},$$

U_1, U_2 — постоянные напряжения сигнала и помехи на выходе синхронного детектора; f_1 — частота первой гармоники; $k(nf_1)$ — коэффициент

усиления измерительной схемы на частоте соответствующей гармоники: $\Delta\psi_n$ — расстройка синхронного детектора для соответствующей гармоники, т. е. сдвиг фаз между коммутирующим напряжением синхронного детектора и соответствующей гармоникой напряжения сигнала *:

$$\Delta\psi_n = n\Delta\psi_0 + \Delta\psi(nf_1) + \varphi_n - \varphi_1 n,$$

где $\Delta\psi_0$ — неточность настройки синхронного детектора на первую гармонику напряжения сигнала: $\Delta\psi(nf_1)$ — сдвиг фаз, обусловленный зависимостью фазовой характеристики усилительной схемы от частоты, на частоте настройки синхронного детектора $\Delta\psi = 0$: $\varphi_n - \varphi_1 n$ — сдвиг фаз, обусловленный действием нагрузки электростатического генератора.

Отношение между постоянными напряжениями сигнала и помехи на выходе синхронного детектора равно

$$M = \pi \frac{I_{m1}}{I_{m2}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(nf_1)\cos\Delta\psi_n}{n^2\sqrt{n^2R^2\omega^2C^2+1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(nf_1)\sin\Delta\psi_n}{n^3\sqrt{n^2R^2\omega^2C^2+1}}}.$$

При измерительной схеме с разумно подобранными параметрами, когда $k(f_1) > k(nf_1)$ и $\sin\Delta\psi_n/n^3$ падает с увеличением n, для расчета достаточно ограничиться отношениями постоянных напряжений, создаваемых первыми гармониками напряжений сигнала и помехи. В этом случае

$$M = \pi \frac{I_{m1}}{I_{m2}} \operatorname{ctg} \Delta\psi_1.$$

Это означает, что можно сильно подавить напряжение помехи на выходе прибора.

Однако вряд ли можно осуществить $\Delta\psi_1 < 1$. Наиболее существенным недостатком этого метода подавления помехи является то, что борьба с помехой ведется на выходе прибора, т. е. громадное по величине напряжение помехи должно пройти через весь тракт усиления, не перегрузив его, что очень трудно осуществить практически. Поэтому необходимы такие методы борьбы с помехой, которые позволят уменьшить действующее напряжение помехи на входе прибора.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Одним из таких методов является введение отрицательной обратной связи по постоянному напряжению помехи [4]. Для этого необходимо параллельно основному синхронному детектору установить дополнительный синхронный детектор, настроенный на напряжение, сдвинутое на 90° по отношению к напряжению сигнала (рис. 2, *б*). Выпрямленное напряжение этого детектора используется для создания обратной отрицательной связи по напряжению.

В общем виде дополнительный синхронный детектор можно осуществить, поместив под измерительной пластиной электростатического генератора дополнительную измерительную пластину той же формы, соединенную электрически с основной измерительной пластиной. Напряжение отрицательной обратной связи подается на специальный электрод, выполненный в виде градуировочной пластины [5]. Между этим электродом и дополнительной измерительной пластиной помещается дополнительная экранная пластина, насаженная на одну ось с основной экранной пластиной. Дополнительную и основную пластины устанавливают так, чтобы

* Фазовый сдвиг между ближайшими переходами через нуль коммутирующего напряжения и соответствующей гармоники сигнального напряжения, который измеряется в градусах гармоники.

переменное напряжение, создаваемое на измерительной пластине вспомогательным электростатическим генератором обратной связи, было в противофазе с переменным напряжением помехи. Это осуществляется, например, сдвигом лопастей дополнительной экранной пластины относительно основной пластины на 90 электрических градусов при соответственном расположении измерительных пластин.

Приведем некоторые расчетные соотношения. Без отрицательной обратной связи

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{1n} k(nf_1) \cos \Delta\psi_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{2n} k(nf_1) \sin \Delta\psi_n}{n},$$

где U — выходное напряжение основного синхронного детектора.

Выходное напряжение дополнительного синхронного детектора U' определяется в этом случае выражением

$$U' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{1n} k(nf_1) \sin \Delta\psi'_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{2n} k(nf_1) \cos \Delta\psi'_n}{n},$$

где $\Delta\psi'_n$ — неточность настройки дополнительного синхронного детектора.

Введение отрицательной обратной связи уменьшает напряжение помехи на входе синхронного детектора в $1 + k(nf_1)\beta_n$ раз (β_n — коэффициент обратной связи).

Для $k(nf_1)\beta_n \gg 1$ с учетом действия обратной связи

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{1n} k(nf_1) \cos \Delta\psi_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{2n} \cos \Delta\psi'_n \sin \Delta\psi_n}{n\beta_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{1n} \sin \Delta\psi_n \sin \Delta\psi'_n}{n\beta_n}.$$

Очевидно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{1n} \sin \Delta\psi_n \sin \Delta\psi'_n}{n\beta_n} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{1n} k(nf_1) \cos \Delta\psi_n}{n}.$$

Поэтому, ограничиваясь, как и в предыдущем параграфе, расчетом отношения постоянных напряжений, создаваемых на выходе основного синхронного детектора первыми гармониками напряжений сигнала и помехи, и учитывая, что $\cos \Delta\psi' \simeq 1$, получим следующее значение коэффициента M':

$$M' = \pi \frac{I_{m1} k(f_1) \beta_1 \operatorname{ctg} \Delta\psi_1}{I_{m2}}.$$

Из этого выражения следует, что при отрицательной обратной связи по напряжению помехи отношение сигнал/помеха на выходе прибора возрастает в $k(f_1)\beta_1$ раз.

Напомним о существовании еще одного способа борьбы с помехой — применение специальных сеточных электродов в электростатическом генераторе. Этот способ довольно полно изложен в работе [1]. Он позволяет уменьшить в b раз переменную составляющую тока помехи, протекающую по нагрузке электростатического генератора,

$$b = b_1 b_2,$$

где b_1 — коэффициент уменьшения переменной части токов помехи, благодаря уменьшению модулирующего действия экранной пластины; b_2 — коэффициент, характеризующий уменьшение абсолютного потока частиц, попадающих на измерительную пластину, выполненную из сетки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При использовании всех трех способов подавления помехи значение отношения напряжение сигнала/напряжение помехи на выходе синхронного детектора определяется выражением

$$M' = \pi \frac{I_{m1} k (f_1) \beta_1 \operatorname{ctg} \Delta\psi_1 b_1 b_2}{I_{m2}}. \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что при применении специальных мер можно измерять небольшие электростатические поля на фоне большого тока помехи. Приближенная оценка дает для произведения $k(f_1)\beta_1 \operatorname{ctg} \Delta\psi_1 b$ величину, имеющую по крайней мере порядок 10^5—10^6, т. е., например, на фоне предельно возможного тока помехи плотностью 10^{-6} *а/см*^{2} [1] можно измерять поля на поверхности зондирующего тела, создающие на единицу поверхности измерительной пластины электростатического генератора ток 10^{-11} *а*. Для электростатического генератора с частотой экспонирования $f = 1500$ *гц* такое значение тока эквивалентно полю $\simeq 3 \cdot 10^{-2}$ *в/см*.

В заключение хочу выразить благодарность И. М. Имянитову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Имянитов, Я. М. Шварц, Методы борьбы с мешающими токами, возникающими на входе электростатического флюксметра при его работе в проводящей среде, Искусственные спутники Земли, 1959, 3, 77.
2. И. М. Имянитов, Измерение электростатических полей в верхних слоях земной атмосферы, Успехи физ. наук, 1957, LXIII, 1б, 267.
3. В. И. Красовский, Советские исследования ионосферы при помощи ракет и искусственных спутников Земли, Искусственные спутники Земли, 1959, 2, 32; В. Г. Истомин, Исследования ионного состава атмосферы Земли на ракетах и спутниках, Искусственные спутники Земли, 1959, 2, 36.
4. Я. М. Шварц, Авторск. свидетельство № 123247, класс 21е, 5_{01}, 1959.
5. И. М. Имянитов, Приборы и методы для изучения электричества атмосферы, ГИТТЛ, 1957.

Поступила в редакцию
4 IV 1960

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУННЕЛЬНОГО ТОКА В УЗКИХ ГЕРМАНИЕВЫХ p – n-ПЕРЕХОДАХ

Н. А. Белова, А. Н. Ковалев

Экспериментально исследовано влияния степени легирования германия на характеристики туннельных диодов. Произведена попытка количественной оценки полученных результатов в соответствии с работой [2].

Исследовано влияние дислокаций в исходном германии, а также температуры на туннельный ток в узких p—n-переходах.

Как следует из качественного описания [1] и последующих теоретических работ, на вид вольтамперной характеристики туннельного диода должна сильно влиять концентрация подвижных носителей заряда как в n-, так и в p-области. Представляло интерес экспериментально выяснить зависимость туннельного тока от таких определяющих его параметров, как степень легирования n- и p-областей.

1. МАКСИМУМ ТУННЕЛЬНОГО ТОКА

Ввиду отсутствия полного выражения для туннельного тока через p — n-переход в виде непрерывной функции от приложенного напряжения, он может быть описан такими экстремальными точками, как максимум и минимум вольтамперной характеристики. В [2], где теоретически рассмотрен вопрос о влиянии условий легирования на характеристики туннельных диодов, в рамках определенной модели получено выражение для разности потенциалов, соответствующей максимуму туннельного тока:

$$eV_{\text{макс}} = \frac{1}{6}\left\{2(E_V - \mu) - (\mu - E_c) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{[2(E_V - \mu) + \mu - E_c]^2 + 4(E_V - \mu)(\mu - E_c)}\right\}, \qquad (1)$$

где μ — химический потенциал; E_c и E_V — верхняя и нижняя границы запрещенной зоны (см. рис. 1); e — заряд электрона.

Соотношение (1) получено в предположении, что p-область легирована сильнее n-области.

Для проведения количественных оценок необходимо знать положение уровня Ферми с обеих сторон p — n-перехода для разных концентраций n и p. Зная концентрацию n, можно определить положение уровня Ферми в n-области, т. е. μ — E_c, из следующего соотношения:

$$n = 2\left(\frac{2\pi kTm^*}{h^2}\right)^{3/2} \delta \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{x-\eta}+1}, \qquad (2)$$

где m^* — эффективная масса электрона; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; h — постоянная Планка; δ — число минимумов в зоне проводимости; $\eta = (\mu - E_c)/kT$. Интеграл протабулирован, значение η определялось по таблицам [4].

В настоящей работе концентрация подвижных носителей n в экспериментальных образцах германия определялась из измерения постоянной Холла R по формуле $n=1/eR$. Постоянная Холла измерялась в магнитном поле напряженностью 5500 *эрс*.

На рис. 2 приведены полученные таким образом значения концентрации в зависимости от удельного сопротивления для германия n-типа, легированного мышьяком или фосфором.

В табл. 1 приведено вычисленное положение уровня Ферми в зоне проводимости для двух различных концентраций n.

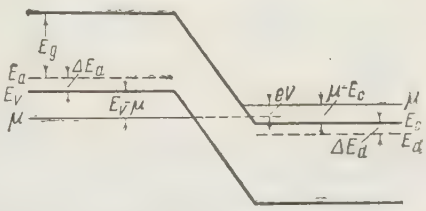


Рис. 1. Примерное расположение зон

Положение уровня Ферми в валентной зоне у экспериментальных диодов можно определить при помощи выражения (1), поскольку концентрацию в получаемой при вплавлении p-области измерить независимым способом невозможно.

Экспериментально исследовалось влияние концентрации носителей в p-области на положение максимума туннельного тока. Для этого были изготовлены диоды из германия с примесью мышьяка (удельное сопро-

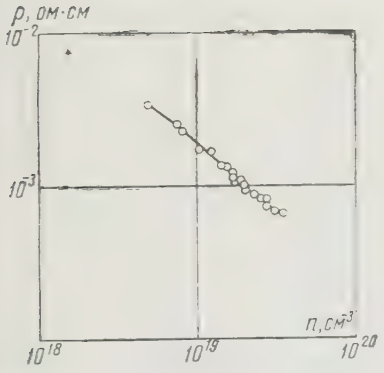


Рис. 2

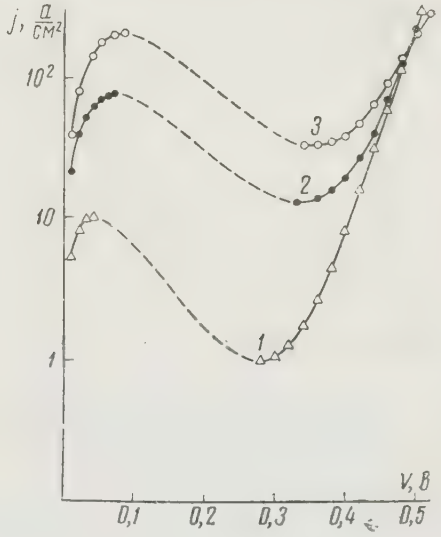


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость удельного сопротивления от концентрации электронов в германии n-типа

Рис. 3. Вольтамперные характеристики туннельных диодов с различной степенью легирования p-области:

1 — соответствует диоду, p-область которого образована вплавлением In + 0,5% Ga; *2* — In + 1% Ga; *3* — In + 1,5% Ga

тивление 0,0009 *ом·см*). Различная концентрация в p-области получалась путем применения разных присадок галлия в индий (от 0,5 до 1,5%), причем для всех экспериментальных диодов концентрация в p-области была заведомо больше концентрации в n-области из-за высокой растворимости галлия в германии ($5 \cdot 10^{20}$ *см*$^{-3}$). Это дает возможность пользоваться соотношением (1).

На рис. 3 приведены прямые ветви вольтамперных характеристик для трех типичных диодов. По мере увеличения концентрации в p-области

Таблица 1

ρ, ом·см	n, см$^{-3}$	$\mu - E_c$
0,00065	$3{,}5 \cdot 10^{19}$	$1{,}4\,kT$
0,0009	$2{,}2 \cdot 10^{19}$	$0{,}5\,kT$

Таблица 2

ρ, ом·см	$\mu - E_c$	$V_{макс}$, мв	$E_V - \mu$
0,0009	$0{,}5\,kT$	40	$2{,}2\,kT$
0,0009	$0{,}5\,kT$	68	$3{,}8\,kT$
0,0009	$0{,}5\,kT$	82	$4{,}6\,kT$

положение максимума туннельного тока сдвигается в область бóльших напряжений.

В табл. 2 приведены рассчитанные из (1) значения уровня Ферми в p-области в зависимости от положения максимума туннельного тока (величины $V_{макс}$ взяты из опыта, значение $\mu - E_c$ — из табл. 1).

Как следует из соотношения (1), положение максимума очень мало зависит от степени легирования в n-области.

Для экспериментальной проверки были изготовлены диоды из германия n-типа с различной концентрацией основных носителей. Дырочная область получалась путем вплавления в германий капельки индия, содержащей 0,5% галлия и 0,5% цинка. Вплавление производилось по кристаллографическому направлению (III), что давало возможность получить ровный фронт вплавления. Для более равномерного распределения примесей в рекристаллизационном слое около $p - n$-перехода применялось медленное охлаждение.

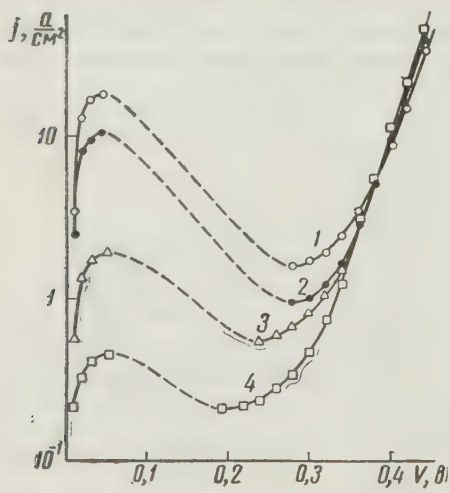


Рис. 4. Вольтамперные характеристики туннельных диодов с различной степенью легирования n-области:

1 — исходный германий, $\rho = 0{,}00065$ *ом·см*; *2* — исходный германий, $\rho = 0{,}0009$ *ом·см*; *3* — исходный германий, $\rho = 0{,}0011$ *ом·см*; *4* — исходный германий, $\rho = 0{,}0016$ *ом·см*

Прямые ветви вольтамперной характеристики изготовленных таким образом диодов представлены на рис. 4, где видно, что положение максимума практически не зависит от концентрации в n-области.

Таким образом, для диодов с более сильно легированной p-областью положение максимума определяется степенью вырождения в p-области.

Экспериментальные кривые рис. 3 и 4, оказавшиеся в хорошем соответствии с выражением (1), обнаруживают также сильную зависимость величины туннельного тока от концентрации в n- и p-областях. Известно [3], что одной из основных характеристик узкого $p - n$-перехода, определяющих величину туннельного тока, является вероятность туннельного просачивания электронов сквозь потенциальный барьер. Эта вероятность пропорциональна следующему выражению:

$$P \sim \exp\left(-\frac{\pi^2 m^{*1/2} E_g^{3/2}}{\sqrt{2}\, heE}\right), \qquad (3)$$

где E — напряженность электрического поля в $p - n$-переходе; E_g — ширина запрещенной зоны в германии.

Поскольку в показателе экспоненты стоит напряженность поля E, то, естественно, эта вероятность весьма чувствительна к положению уровня Ферми с обеих сторон перехода, т. е. к степени легирования n- и p-обла-

тей. Следовательно, для проверки разумности полученных выше значений для положения уровня Ферми в изготовленных диодах можно оценить изменение вероятности туннельного просачивания P в зависимости от степени легирования и результат сравнить с полученным на опыте изменением плотности туннельного тока.

Для вычисления напряженности поля в переходе необходимо знать его толщину, которая определялась по формуле

$$W = \sqrt{\frac{\varepsilon U}{2\pi e n}},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость германия; U — разность потенциалов между n- и p-сторонами, определяемая из соотношения (см. рис. 1)

$$eU = E_g + (E_V - \mu) + (\mu - E_c) - eV;$$

V — приложенное напряжение.

Оценка показывает, что у диода *3* (рис. 3) вероятность туннельного просачивания в 13 раз больше, чем у диода *1*. По данным опыта отношение токов в максимуме для этих диодов ~20. Такая же оценка дает для диодов *1* и *3* (рис. 4) отношение вероятностей туннельного просачивания ~30. По данным опыта, ток в максимуме для диода *1* больше, чем у диода *3* в 10 раз.

2. ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ТУННЕЛЬНОГО ТОКА

В [5] экспериментально показано, что температурная зависимость туннельного тока может быть как положительной, так и отрицательной, причем автор связывает характер температурной зависимости с природой легирующей примеси (мышьяк, сурьма).

Измерение зависимости туннельного тока от температуры производилось нами для диодов с различными концентрациями в n- и p-областях. Исходный германий был легирован мышьяком или сурьмой. Эксперимент показал, что когда степень легирования p-области велика ($p \gg n$), то наблюдается уменьшение туннельного тока при понижении температуры,

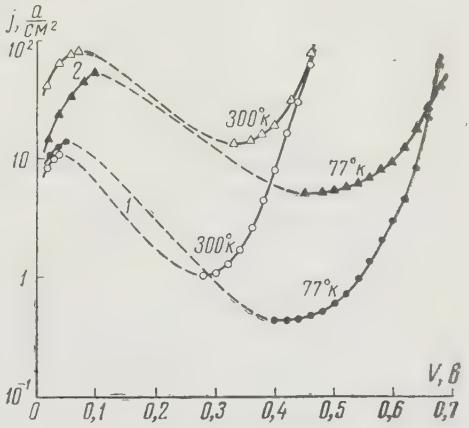


Рис. 5. Температурная зависимость туннельного тока; исходный германий, $\rho = 0{,}0009$ *ом·см*

независимо от природы примеси в германии n-типа. При меньшей концентрации носителей в p-области ($p \geqslant n$) туннельный ток возрастает с понижением температуры. Более того, оказывается возможным получить различную температурную зависимость туннельного тока при одной и той же концентрации мышьяка в исходном германии, меняя степень легирования p-области.

На рис. 5 показаны прямые ветви вольтамперных характеристик двух диодов с одинаковой концентрацией n-области, но с разной степенью легирования p-области. Кривые *2* соответствуют диоду, имеющему более сильное вырождение в p-области, чем у диода, соответствующего кривым *1*. Характеристики сняты при комнатной температуре (293° К) и температуре жидкого азота (77° К). Для кривой *2* имеет место положительная температурная зависимость, для кривой *1* — отрицательная.

Таким образом, характер температурной зависимости туннельного тока определяется прежде всего степенью вырождения в n- и p-областях туннельного диода.

3. МИНИМУМ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Известно [2], что в германии уже при концентрации 10^{18} $см^{-3}$ локальные уровни элементов 3 и 5 групп, размываясь, образуют примесные зоны, которые при концентрациях порядка 10^{19}—10^{20} $см^{-3}$ могут перекрываться с близлежащими «собственными» зонами полупроводника. Очевидно, что для применяемых нами концентраций необходимо учитывать присутствие примесных зон и их влияние прежде всего на положение минимума вольтамперной характеристики. В [2] дано следующее выражение для разности потенциалов, приложенной к p — n-переходу, при которой наступает полное исчезновение туннельного тока:

$$eV_{\text{мин}} = \Delta E_a + \Delta E_d + (\mu - E_c) + (E_V - \mu), \qquad (4)$$

где ΔE_a— ширина акцепторной примесной зоны; ΔE_d — ширина донорной примесной зоны.

Таким образом, положение минимума непосредственно зависит от ширины примесных зон, и, следовательно, из него можно получить сведения об энергетическом спектре вырожденного полупроводника.

Приведенные выше экспериментальные данные качественно согласуются с выражением (4). Так, на рис. 3 и 4 видно, что положение минимума вольтамперной характеристики сдвигается в сторону бо́льших напряжений по мере увеличения концентрации в n- и p-областях. Кроме того, пользуясь выражением (4), можно оценить ширину примесных зон, например, для диода, характеристика *2* которого дана на рис. 4. Напряжение, при котором наблюдается минимум на характеристике, можно принять за разность потенциалов, при которой наступает полное исчезновение туннельного тока, так как ток в минимуме для этого диода составляет 10% от тока в максимуме. Оказывается, что $\Delta E_a + \Delta E_d \simeq 0{,}2$ *эв*.

В [2] высказываются соображения о возможном влиянии на туннельный ток различных протяженных дефектов в решетке полупроводника, в частности дислокаций, присутствие которых может приводить к появлению участков непрерывного спектра в запрещенной зоне. С другой стороны, несовершенства кристаллической решетки германия вызывают неоднородность рекристаллизационного слоя при сплавлении диодов, что также может приводить к неоднородности p—n-перехода и различного рода утечкам в нем. В связи с этим были проделаны опыты, имеющие целью выяснить влияние дислокаций в исходном германии на вольтамперные характеристики туннельных диодов. Для этого изготавливались диоды из германия с различной плотностью дислокаций (от 20 до 1000 $см^{-2}$). Эксперимент показал, что более ровное и, видимо, однородное по распределению примесей вплавление происходит в кристаллах без дислокаций. Отметим, что наибольший перепад тока ($I_{\text{макс}}/I_{\text{мин}}$) получен именно у диодов, изготовленных из германия с малой плотностью дислокаций. В то же время не установлено заметной зависимости туннельного тока от плотности дислокаций. Это произошло, скорее всего, в силу малости туннельного тока, текущего по дислокационной зоне, плотность состояний в которой мала по сравнению с плотностью состояний в собственной зоне германия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально показано, что степень легирования n- и p-областей узкого p — n-перехода существенно влияет на туннельный ток и прежде всего на величину и положение максимума и минимума вольтамперной характеристики. Для диодов с более сильно легированной p-областью по-

ожение максимума определяется в основном степенью вырождения в *p*-бласти. Положение минимума вольтамерной характеристики сдвигается сторону бо́льших напряжений при увеличении степени легирования *n*- и -областей; возможно, это связано с присутствием примесных зон в силь-о легированном полупроводнике.

Из эксперимента следует также, что характер температурной зависи-ости туннельного тока определяется степенью вырождения в *n*- и *p*-об-астях.

Не обнаружено заметной зависимости туннельного тока от плотности ислокаций.

В заключение считаем своим долгом выразить признательность . Е. Скворцовой за предложенную тему и постоянный интерес к работе. скренне благодарим В. Л. Бонч-Бруевича за ценные советы при неодно-ратном обсуждении работы; благодарим также С. Г. Калашникова за деланные нам полезные указания.

ЛИТЕРАТУРА

. L. Esaki, Phys. Rev., 1958, 109, 603.
. В. Л. Бонч-Бруевич, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 2033.
. J. A. Lesk, N. Holonyak, IRE Wescon Convention Record, 1959, 3, 8.
. J. McDougall, E. C. Stoner, Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1939, 237, 67.
. V. Furukawa, Phys. Soc. Japan, 1960, 15, 6.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
10 IX 1960

1961 № 1

ФЛУКТУАЦИИ В ГЕНЕРАТОРЕ НА ОТРАЖАТЕЛЬНОМ КЛИСТРОНЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ РАЗБРОСОМ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОТОКЕ, ДРОБОВЫМ И ТЕПЛОВЫМ ЭФФЕКТАМИ

Е. Н. Базаров, М. Е. Жаботинский

Методом символических уравнений и корреляционной теории рассмотрены флуктуации в генераторе на отражательном клистроне, обусловленные разбросом скоростей электронов в потоке, дробовым и тепловым эффектами. Получены выражения для средних квадратов флуктуаций амплитуды и фазы и для спектра колебаний. Показано, что при определенных условиях разброс скоростей электронов в потоке может существенно влиять на флуктуации.

В работах [1, 2] рассмотрены флуктуации амплитуды и фазы колебания автономного генератора на отражательном клистроне, обусловленные только дробовым и тепловым эффектами. Используя для исследования флуктуаций метод символических уравнений и корреляционной теории [3], нетрудно учесть и влияние разброса скоростей электронов в потоке на флуктуации амплитуды и фазы колебания генератора. Для этого, отвлекаясь от реальной структуры потока электронов, считаем его односкоростным [4] и представляем скорость электронов на входе в зазор резонатора клистрона в виде

$$v_1(t) = v_0(1 + p_0(t)),$$

где v_0 — постоянная составляющая скорости электронов; $p_0(t)$ — флуктуация скорости; t — время.

Конвекционный ток на входе в зазор резонатора клистрона запишем в форме

$$i_1(t) = I_0(1 + f_0(t)).$$

Здесь I_0 — средний ток катода; $f_0(t)$ — флуктуация тока.

Поскольку исследуемая система узкополосна, можно считать, что как для скорости, так и для тока спектры флуктуаций равномерны в полосе системы. Это позволяет заменить реальные функции корреляции p_0 и f_0 на δ-функции, т. е. записать

$$\overline{p_0(t)\,p_0(t')} = A_0\delta(t - t'),$$

$$\overline{f_0(t)\,f_0(t')} = B_0\delta(t - t').$$

В общем случае p_0 и f_0 коррелированы:

$$\overline{p_0(t)\,f_0(t')} = C_0\delta(t - t').$$

Множители A_0, B_0 и C_0 определяются режимом работы катода и конструкцией электронного прожектора клистрона и их можно найти для каждого случая из спектров флуктуаций, полученных в [4].

Резонатор клистрона можно заменить, как известно, эквивалентным контуром с сосредоточенными индуктивностью L, емкостью C и сопротивлением r. В этом случае легко написать уравнение для напряжения на зазоре резонатора. Полученное уравнение отличается от соответствующего уравнения работы [2] лишь тем, что в его коэффициентах теперь учтен разброс скоростей электронов. Ввиду близости рассматриваемой системы к линейной консервативной можно тем же методом, что и в [2], получить выражения для: 1) среднего квадрата флуктуаций амплитуды напряжения на зазоре резонатора:

$$\bar{\rho}^2 = \frac{L_{11} + 2L_{21}\exp(-p_1\theta_0)}{8p_1}, \tag{1}$$

2) спектральной плотности амплитудных флуктуаций:

$$g(\Omega) = \frac{L_{11} + 2L_{21}\cos\frac{\theta_0}{\omega}\Omega}{4\pi p_1^2} \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\omega p_1}\right)^2}, \tag{2}$$

3) среднего квадрата флуктуаций фазы при $\omega p_1 t \gg 1$:

$$\bar{\chi}^2 = \left\{ \frac{q_1^2}{4p_1^2}(L_{11}+2L_{21}) + \frac{1}{4R_0^2}(L_{12}+2L_{22}) - \right.$$
$$\left. - \frac{q_1^2}{4p_1R_0}[P_{11}+P_{12}+2(P_{21}+P_{22})] \right\} \omega t. \tag{3}$$

Первый член выражения (3) обусловлен амплитудными флуктуациями, второй — непосредственным действием случайных толчков, третий — корреляцией флуктуаций амплитуды и толчков.

Входящие в выражения (1) — (3) величины L и P определяются как флуктуационными свойствами потока электронов, так и режимом работы клистрона. Они имеют вид

$$\left.\begin{matrix} L_{11} \\ L_{12} \end{matrix}\right\} = 2\left\{ 2rk_0T\omega_0 + \frac{I_0^2}{\omega_0 C^2}[2B_0 + A_0\theta_0^2 \pm \right.$$
$$\left. \pm (2\theta_0 C_0 \sin 2\theta_0 + (\theta_0^2 A_0 - B_0)\cos 2\theta_0) J_2(2z_0)] \right\},$$
$$\left.\begin{matrix} L_{21} \\ L_{22} \end{matrix}\right\} = 2\frac{I_0^2}{\omega_0 C^2}[J_0(z_0) \mp J_2(z_0)](\theta_0 C_0 \sin\theta_0 - B_0\cos\theta_0), \tag{4}$$
$$\left.\begin{matrix} P_{11} \\ P_{12} \end{matrix}\right\} = 2\frac{I_0^2}{\omega_0 C^2}[2\theta_0 C_0\cos 2\theta_0 + (B_0 - \theta_0^2 A_0)\sin 2\theta_0] J_2(2z_0),$$
$$\left.\begin{matrix} P_{21} \\ P_{22} \end{matrix}\right\} = -2\frac{I_0^2}{\omega_0 C^2}(B_0\sin\theta_0 + C_0\theta_0\cos\theta_0) J_2(z_0).$$

Здесь k_0 — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; $\omega_0^2 = 1/LC$; $z_0 = \frac{\eta_0\theta_0}{v_0^2} R_0$; $\eta_0 = e/m$ — отношение заряда электрона к его массе; θ_0 — средний угол пролета электронов в пространстве отражателя; R_0 — стационарная амплитуда переменного напряжения на зазоре резонатора; ω — частота, генерируемая клистроном; $J_k(z_0)$ — функция Бесселя первого рода k-го порядка, $\Lambda_1(z_0) = \frac{2}{z_0} J_1(z_0)$.

Величины p_1 и q_1 определяются выражениями:

$$p_1 = \frac{I_0\eta_0\theta_0}{2\omega_0 C v_0^2} z_0 \frac{d\Lambda_1(z_0)}{dz_0} \sin\theta_0,$$

$$q_1 = \frac{I_0\eta_0\theta_0}{2\omega_0 C v_0^2} \frac{d\Lambda_1(z_0)}{dz_0} \cos\theta_0, \qquad (5)$$

причем стационарные значения z_0 и частота ω определяются уравнениями

$$1 + \frac{I_0\eta_0\theta_0}{r\omega_0^2 C^2 v_0^2} \Lambda_1(z_0) \sin\theta_0 = 0,$$

$$\omega \simeq \omega_0 - \frac{I_0\eta_0\theta_0}{C v_0^2} \Lambda_1(z_0) \cos\theta_0. \qquad (6)$$

В выражениях (4) члены, содержащие A_0, B_0 и C_0, обусловлены соответственно флуктуациями скорости, конвекционного тока и корреляцией флуктуаций скорости и конвекционного тока. Отметим, что при пренебрежении флуктуациями скорости электронов ($A_0 = C_0 = 0$) и тепловыми флуктуациями и при оптимальном угле пролета электронов в пространстве отражателя $\left(\theta_0 = \theta_0^{\text{опт}} = \left(\frac{3}{4} + n\right)2\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots\right)$ выражения (1) — (3), согласно (4), с точностью до коэффициента $^1/_2$ при $J_2(2z_0)$ совпадают с аналогичными выражениями работы [1]. При $\theta_0 \neq \theta_0^{\text{опт}}$ и $A_0 = C_0 = 0$ выражения (1) и (3) с точностью до величин порядка $(p_1\theta_0)^2$ совпадают с аналогичными выражениями работы [2]. В результате учета флуктуаций скорости электронов ($A_0 \neq 0$) и корреляции флуктуаций скорости и конвекционного тока ($C_0 \neq 0$) в выражениях (1) — (3) появляются члены, величины которых можно сравнить с величинами членов, обусловленных флуктуациями конвекционного тока. Действительно, если, например, угол пролета катод—зазор резонатора равен ~ 9, то, согласно [4], для коэффициентов A_0, B_0 и C_0 имеем

$$A_0 \simeq \frac{e}{I_0} 10^{-4},$$

$$B_0 \simeq \frac{e}{I_0} 10^{-2},$$

$$C_0 \simeq \frac{e}{I_0} 10^{-5},$$

а так как при A_0 всегда стоит множитель θ_0^2, то члены, содержащие A_0, могут быть одного порядка с членами, содержащими B_0. Наоборот, членами, обусловленными корреляцией флуктуаций скорости и конвекционного тока, почти всегда можно пренебречь. Тогда для среднего квадрата флуктуаций фазы при оптимальном угле пролета θ_0 получаем из (3) и (4):

$$\overline{\chi^2} = \frac{eI_0}{R_0^2 C^2}\left[1 + \frac{\theta_0^2}{2} 10^{-2} + \frac{\theta_0^2 \cdot 10^{-2} - 1}{2} J_2(2Z_0)\right] 10^{-2} t.$$

Для наглядности здесь опущен член, описывающий влияние тепловых флуктуаций, который относится к тому же порядку малости, что и члены, обусловленные корреляцией флуктуаций скорости и конвекционного тока.

При работе клистрона на второй зоне $\theta_0 \simeq 17$, а при работе на четвертой зоне $\theta_0 \simeq 30$. Отсюда следует, что флуктуации скорости могут существенно влиять на флуктуации фазы выходного колебания, и тем больше, м выше номер рабочей зоны.

ЛИТЕРАТУРА

И. Л. Берштейн, Докл. АН СССР, 1956, **106**, 453.
Е. Н. Базаров, М. Е. Жаботинский, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 10, 1685.
С. М. Рытов, ЖЭТФ, 1955, 29, 304.
С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов СВЧ, ГИТТЛ, 1956, стр. 248.

Поступила в редакцию
15 VI 1960

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УСИЛЕНИЕ ЛАМПЫ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА УСИЛЕНИЯ *C*

М. Б. Цейтлин, Е. М. Ильина

Анализ взаимодействия потока электронов с бегущей электромагнитной волной в ЛБВ приводит к уравнению четвертой степени с комплексными коэффициентами для постоянных распространения (см., например, [1, 2]). Обычно предполагают, что усиление на единицу длины волны мало, т. е. что параметр усиления C, введенный Пирсом [1], много меньше единицы. При этом предположении получают уравнение третьей степени для постоянных распространения.

Однако в лампах средней и большой мощности параметр C может достигать значений 0,1 — 0,2. В этом случае при определении постоянных распространения следует учитывать конечные значения C (т. е. решать уравнение четвертой степени [3]). Численное решение этого уравнения представляет значительную трудность.

Изложенный в [4] энергетический метод расчета позволяет сравнительно просто определить усиление ЛБВ при конечных значениях параметра усиления C. Этот метод состоит в отыскании закона распределения амплитуды напряженности ВЧ-поля вдоль лампы из уравнения баланса активной мощности. При этом предполагается, что поле в линии может быть представлено одной волной с постоянной фазовой скоростью.

В [4] получено следующее асимптотическое выражение для усиления ЛБВ:

$$G = BCN + A = 8{,}68\mu z + 20 \lg \frac{mk}{\mu^2 (\mu^2 + \nu^2)} \ \partial б, \tag{1}$$

где

$$\mu = \beta_e C \sqrt{\sqrt{2b\gamma^2 + 4b^2 q} - (q + b^2)};$$

$$\nu = \beta_e C \sqrt{\sqrt{2b\gamma^2 + 4b^2 q} + (q + b^2)}; \tag{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\beta_e} = 1 + bC; \tag{3}$$

$$m = \beta_e \beta^2 C^3; \quad k = \beta_e C b; \tag{4}$$

$q = \beta_q^2 / \beta_e^2 C^2$ — параметр пространственного заряда; $b = (u_0 - v_\Phi) / C v_\Phi$ — параметр несинхронности для возмущенной волны; β_e — фазовая постоянная потока электронов; β — фазовая постоянная для волны в системе с пучком*.

Для конечных значений параметра усиления C нельзя полагать $\gamma = 1$, а следует использовать выражение (3).

Соотношения (1) — (3) позволяют рассчитать усиление ЛБВ при конечных значениях параметра C в зависимости от фазовой скорости возмущенной волны. Однако практический интерес представляет зависимость усиления от фазовой скорости невозмущенной волны, так как именно она связана с геометрическими параметрами линии. Соотношение между фазовыми скоростями возмущенной и невозмущенной волн можно получить из уравнения баланса реактивной мощности.

Реактивную мощность в линии можно определить из соотношения

$$P_{\text{пр}} = \frac{(\beta - \beta_0) E_1^2 (z)}{2\mu\beta^2 K_c} - \frac{(\beta - \beta_0) E_1^2 (0)}{2\mu\beta^2 K_c}, \tag{5}$$

где β_0 — фазовая постоянная невозмущенной волны; K_c — сопротивление связи.

---

* В [4] под β подразумевалась фазовая постоянная волны в системе без пучка. Для $C \ll 1$ это не приводило к ошибке, поскольку в этом случае можно было положить $\gamma = 1 + bC \simeq 1$.

Это соотношение легко получить из выражения для полного потока мощности в линии на участке dz при наличии пучка электронов [5]:

$$dP_{л} = \frac{EE^*}{K_c \beta^2} (\Gamma - \Gamma_0)\, dz, \tag{5'}$$

где E — напряженность ВЧ-электрического поля вдоль линии; $\Gamma = \mu + j\beta$ — постоянная распространения возмущенной волны; $\Gamma_0 = -j\beta_0$ — постоянная распространения невозмущенной волны в отсутствие потерь.

Предполагая, что амплитуда напряженности ВЧ-поля в линии меняется по экспоненциальному закону (как $e^{\mu z}$), интегрируя (5′) в пределах от нуля до z и выделяя мнимую часть, придем к выражению (5) для потока реактивной мощности в линии.

С другой стороны, реактивную мощность взаимодействия можно представить в виде

$$P_{эр} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^z E(z)\, i^*(z)\, dz, \tag{6}$$

где $E(z)$ и $i(z)$ — высокочастотные составляющие напряженности поля и тока, определяемые соотношениями [4]

$$E(z) = E_1(z)\, e^{-j\beta_e (1 + bC) z}; \tag{7}$$

$$i(z) = j \frac{I_0 \beta_e}{2U_0} \int_0^z E(x) \frac{\sin \beta_q (z - x)}{\beta_q} e^{-j\beta_e (z - x)}\, dx; \tag{8}$$

$E_1(z)$ — амплитуда напряженности поля; I_0, U_0 — постоянные составляющие тока и напряжения пучка соответственно.

Подставляя (7) и (8) в (6) и используя условие баланса реактивной мощности $P_{эр} = P_{лр}$, получаем

$$\frac{\beta - \beta_0}{2\mu\beta^2 K_c} [E_1^2(z) - E_1^2(0)] = -\frac{I_0 \beta_e}{4U_0 \beta_q} \int_0^z E_1(x)\, dx \int_0^x E_1(t) \cos k(x - t) \sin \beta_q (x - t)\, dt. \tag{9}$$

Используя выражение для амплитуды поля $E_1(z)$ в режиме асимптотического усиления [4],

$$\frac{E_1(z)}{E_1(0)} = \frac{mk}{\mu^2 (\mu^2 + \nu^2)} e^{\mu z},$$

после соответствующих преобразований найдем

$$\beta - \beta_0 = \frac{\mu^2 + \beta_q^2 - k^2}{2k}. \tag{10}$$

Значение $\beta - \beta_0$ можно выразить через параметры несинхронности b и b_x для возмущенной и невозмущенной волн соответственно по формуле

$$b - b_x = \frac{\beta - \beta_0}{\beta_e C}. \tag{11}$$

Из соотношений (10), (11), (2) и (3) находим искомую зависимость между b и b_x:

$$b_x = 2b - \frac{1}{2b} \sqrt{2b(1 + bC)^2 + 4b^2 q}. \tag{12}$$

Для $C \ll 1$ соотношение (12) принимает вид

$$b_x = 2b - \sqrt{\frac{1}{2b} + q}. \tag{13}$$

В случае большого пространственного заряда ($q > 1$) из (13) можно получить

$$b_x \simeq 2b - \sqrt{q}. \tag{14}$$

В [4] показано, что для $q > 1$ $b_{опт} = \sqrt{q}$. Как следует из (14), в этом случае $b_x \simeq b = \sqrt{q}$. Следовательно, при большом пространственном заряде в режиме максимального усиления фазовая скорость волны почти не изменяется под действием потока электронов. Это положение подтверждается также результатами более строгого анализа [6].

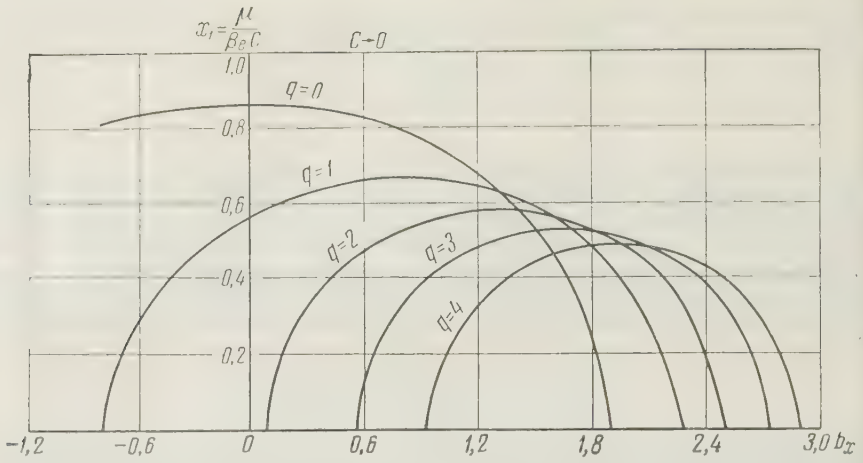


Рис. 1. Зависимость параметра возрастающей волны $x_1 = \mu / \beta_e C$ от параметра несинхронности b_x для $C \to 0$

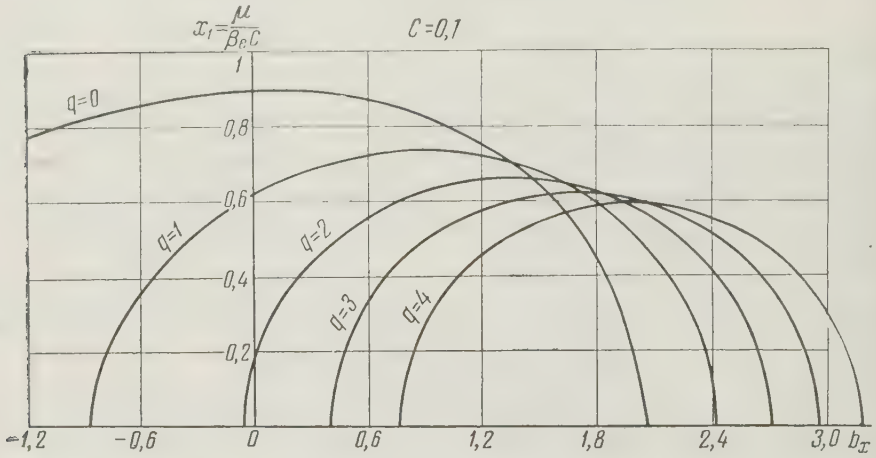


Рис. 2. Зависимость параметра возрастающей волны $x_1 = \mu / \beta_e C$ от параметра несинхронности b_x для $C = 0{,}1$

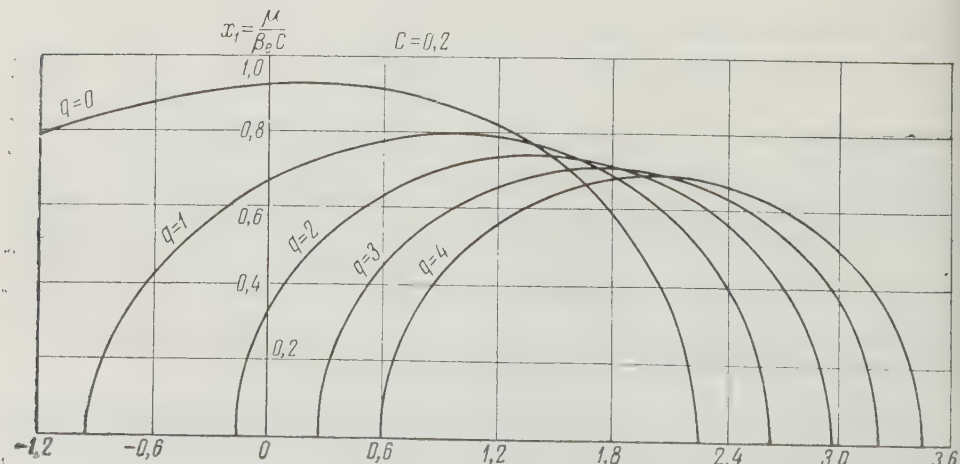


Рис. 3. Зависимость параметра возрастающей волны $x_1 = \mu / \beta_e C$ от параметра не синхронности b_x для $C = 0{,}2$

Соотношения (2), (3) и (12) позволяют рассчитать зависимость параметра возрастающей волны $x_1 = \mu/\beta_e C$ от параметра несинхронности для невозмущенной волны b_x и параметра пространственного заряда q для различных значений C. Эта зависимость представлена на рис. 1—3. На рис. 4 представлена зависимость максимального значения $x_1 = \mu/\beta_e C$ от q для различных значений C. Из приведенных графиков видно, что с увеличением C кривая зависимости x_1 от q становится более пологой. При конечных значениях C максимальное усиление имеет место, когда величина $x_1/1 + b_x C$, пропорциональная усилению на единицу длины волны в системе, максимальна. На рис. 5 представлена зависимость максимального значения $x_1/1 + b_x C$ от q для различных значений C.

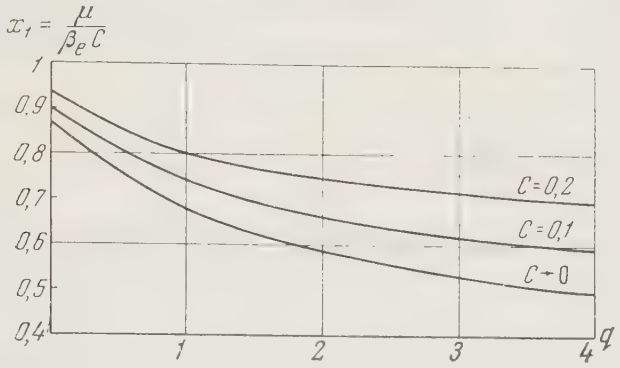


Рис. 4. Зависимость максимального значения параметра возрастающей волны x_1 от q для различных значений параметра усиления C

Определяя оптимальное значение b, соответствующее максимальному значению $x_1/1 + b_x C$, можно вычислить параметр начальных потерь A для конечных значений C по формуле

$$A = 20 \lg \frac{mk}{\mu^2 (\mu^2 + \nu^2)} . \qquad (15)$$

Зависимость A от q для различных значений C представлена на рис. 6.

Приближенный учет затухания в линии, проведенный в [4], можно обобщить на случай конечных значений C.

На рис. 7 и 8 представлена зависимость параметра возрастающей волны $x_1 = \mu/\beta_e C$ от параметра затухания d для различных значений C и q.

В [1] показано, что зависимость параметра возрастающей волны x_1 от параметра затухания d для $C \ll 1$ можно приближенно описать формулой

$$x_1 = x_{10} - \frac{d}{3} ,$$

где x_{10} — значение x_1 при $d = 0$. Можно показать, что аналогичная зависимость имеет место и при конечных значениях C. На рис. 7 и 8 пунктирными линиями проведены прямые $x_1 = x_{10} - \frac{d}{3}$ для значений $C = 0{,}1$ и $0{,}2$. Соответствие сплошных и пунктирных кривых довольно хорошее. Результаты, полученные в данной статье, совпадают с результатами работы [3] для нулевого пространственного заряда.

Для пространственного заряда, отличного по нуля, при сравнении результатов следует воспользоваться соотношением [3]

$$4QC = \frac{q}{(1 + C\sqrt{q})^2} . \qquad (16)$$

Сравнение, проведенное с учетом (16), показывает, что значения параметра x_1, вычисленные в [3], превышают значения $x_1 = \mu/\beta_e C$, рассчитанные по формуле (2). Это, по-

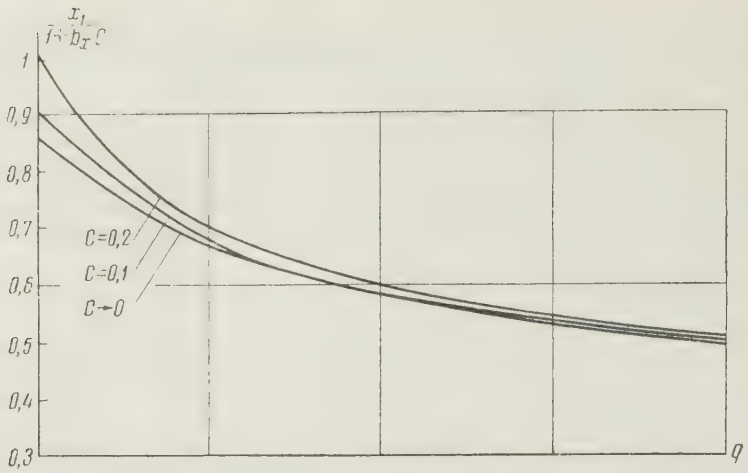


Рис. 5. Зависимость максимального значения величины $x_1 / 1 + b_x C$ от q для различных значений C

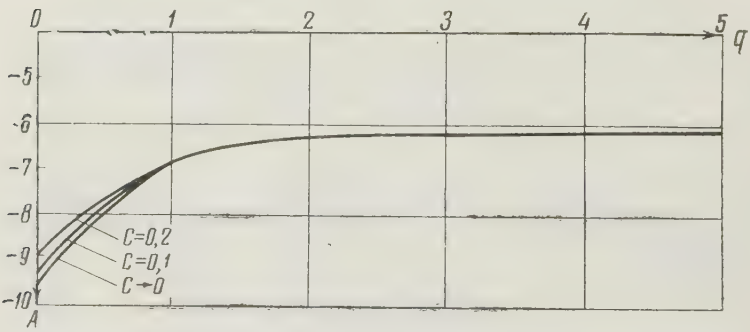


Рис. 6. Зависимость параметра начальных потерь A в оптимальном режиме от пространственного заряда q для различных значений параметра C

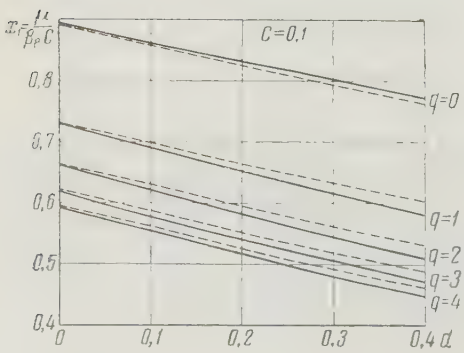


Рис. 7

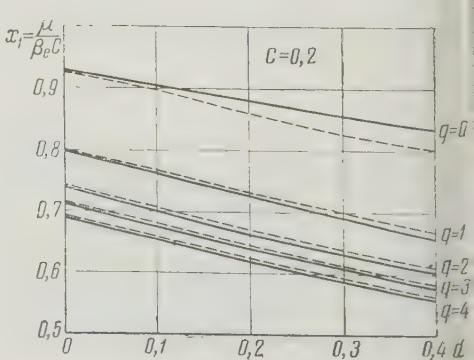


Рис. 8

Рис. 7. Зависимость параметра возрастающей волны $x_1 = \mu / \beta_e C$ от параметра затухания d для $C = 0{,}1$

Рис. 8. Зависимость параметра возрастающей волны $x_1 = \mu / \beta_c C$ от параметра затухания d для $C = 0{,}2$

димому, объясняется тем, что авторы [3] использовали для конечных значений C рактеристическое уравнение, выведенное в [1], в котором пространственный заряд тен недостаточно точно. Как показал предварительный расчет, значения $x_1 = \mu/\beta_e C$, лученные в данной работе, полностью совпадают со значениями параметра возра-ающей волны, рассчитанными из характеристического уравнения (VII.18) работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

Дж. Пирс. Лампа с бегущей волной, Изд. Советское радио, 1952.
A. H. Beck, Space-charge waves and slow electromagnetic waves, Pergamon Press, London, 1958, p. 223.
Ch. Birdsall, G. Brewer, IRE Trans, 1954, ED-1, 3, 1.
М. Б. Цейтлин, Е. М. Ильина, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 4, 700.
В. Н. Шевчик, Основы электроники СВЧ, Изд. Советское радио, 1959, стр. 148.
Л. Н. Лошаков, ЖТФ, 1953, 23, 10, 1833.

Поступило в редакцию
19 IV 1960

МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР НА АММИАКЕ, РАБОТАЮЩИЙ БЕЗ ЖИДКОГО АЗОТА

В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский

Ранее нами совместно с Г. А. Васневой была обоснована возможность создания молекулярного генератора [1], работающего на пучке молекул аммиака, без применения вымораживания этих молекул [2]. Было показано, что для осуществления такого генератора необходимы источники пучка, дающие направленность 5—10°, или же, в отсутствие таких источников, разделение рабочего объема молекулярного генератора на две камеры: рабочую и камеру источника с раздельной откачкой каждой из камер. Камеры разделяются диафрагмой, положение и отверстие которой подбираются так, чтобы обеспечить необходимую направленность пучка, входящего в рабочую камеру (см. рис. 1). Требуемая производительность насосов определяется по формуле

$$S = 2{,}8 \cdot 10^{-20} \frac{N}{P}, \qquad (1)$$

где S — производительность насоса, *л/сек*; P — рабочее давление в соответствующей камере, *мм* рт. ст.; N — число молекул, влетающих ежесекундно в эту камеру.

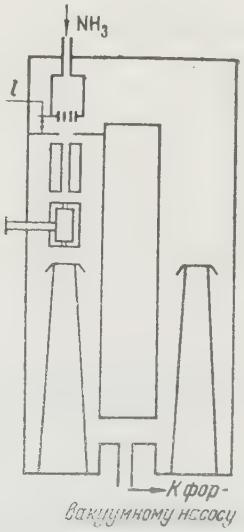


Рис. 1. Двухкамерный молекулярный генератор

Как известно, мощность молекулярного генератора лежит в пределах 10^{-9} *вт*. Для получения этой мощности с учетом насыщения в резонатор должно ежесекундно входить $\sim 10^{15}$ активных молекул используемого перехода. Для линии (3,3) эти молекулы составляют примерно 2% от общего числа молекул в пучке. Поэтому при полном использовании пучка в молекулярный генератор должно входить $\sim 1 \cdot 10^{17}$ молекул в секунду. Для откачки этого количества молекул при вакууме $2 \cdot 10^{-5}$ *мм* рт. ст., при котором генератор работает вполне устойчиво, достаточно иметь насос производительностью ~ 100 *л/сек*. Необходимую производительность насоса можно уменьшить за счет снижения интенсивности пучка и, соответственно, мощности колебаний молекулярного генератора в пределах, допускаемых чувствительностью приемника.

В случае двухкамерного варианта могут применяться ненаправленные источники типа тонкой решетки. При этом полная интенсивность пучка, влетающего в камеру

источника, возрастает до $\sim 3 \cdot 10^{18}$ молекул в секунду. Так как в камере источника пучок должен проходить путь менее 1 *см*, то для обеспечения необходимой длины свободного пробега здесь достаточен вакуум порядка 10^{-3} *мм* рт. ст., что обеспечивается применением насоса производительностью ~ 100 *л/сек*. Применение направленных источников позволяет существенно уменьшить эту производительность.

Тип генератора	Давление в источнике, *мм* рт. ст.	Давление в рабочей камере, *мм* рт. ст.	Давление в камере источника, *мм* рт. ст.	Минимальное давление в источнике, *мм* рт. ст.	Сигнал / шум
Генератор без жидкого азота с одной камерой	$6{,}5 \cdot 10^{-2}$	$2{,}7 \cdot 10^{-5}$	—	$2{,}2 \cdot 10^{-2}$	~ 10
Двухкамерный генератор, $l = 3$ *мм*	$1{,}2 \cdot 10^{-1}$	$2{,}2 \cdot 10^{-5}$	$1{,}6 \cdot 10^{-4}$	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	~ 16
Двухкамерный генератор, $l = 6$ *мм*	$1{,}3 \cdot 10^{-1}$	$2{,}0 \cdot 10^{-5}$	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$	~ 20
Генератор с жидким азотом	$2{,}5 \cdot 10^{-1}$	$6{,}3 \cdot 10^{-6}$	—	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$	~ 40
Генератор с жидким азотом	$6{,}5 \cdot 10^{-2}$	$2{,}1 \cdot 10^{-6}$	—	—	~ 25

Экспериментальная проверка работоспособности молекулярного генератора без жидкого азота была проведена на обычном лабораторном молекулярном генераторе, имеющем следующие данные (они не изменялись во всех нижеописанных экспериментах): длина резонатора 100 *мм*, длина квадрупольного конденсатора 100 *мм*, диаметр входного зрачка 6 *мм*, $U_{кв} = 32$ *кв*. В качестве источника использовалась решетка с длинными каналами*: диаметр канала 0,25 *мм*, длина 5 *мм*, число каналов 185. Полный диаметр решетки 4 *мм*. Расстояние между резонатором и квадруполями 7 *мм*, расстояние между решеткой и квадруполями 14,5 *мм*. Рабочая камера генератора откачивалась стандартным диффузионным насосом Н-5 с маслоотражателем, имеющим производительность ~ 250 *л/сек*. При экспериментах с двухкамерным генератором камера источника откачивалась насосом ЦВЛ-100 через вакуумпровод длиной 0,5 *м* и диаметром 60 *мм*, что уменьшало эффективную скорость откачки. Генерация наблюдалась при помощи СВЧ-приемника со стабилизированным по кварцу гетеродином с УПЧ $f_0 = 56$ *Мгц*, $\Delta f = 0{,}4$ *Мгц*. Измерения при работе генератора без жидкого азота сравнивались с аналогичными измерениями для того же генератора, но с применением жидкого азота. Результаты экспериментов сведены в таблицу.

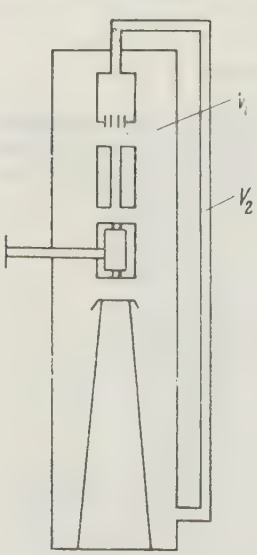


Рис. 2. Молекулярный генератор с циркуляцией аммиака

Из таблицы видно, что двухкамерный безазотный генератор дает отношение сигнала к шуму всего в два раза хуже, чем генератор с жидким азотом, несмотря на то, что эта первая и, естественно, не оптимальная конструкция.

Следует обратить внимание также на то, что при запуске генератора без жидкого азота с одним насосом давление в источнике равнялось $6{,}5 \cdot 10^{-2}$ *мм* рт. ст., что соответствует длине свободного пробега молекул $\sim 0{,}6$ *мм*, в то время как длина канала равна 5 *мм*. Это значит, что из-за малой интенсивности пучка направленность такой решетки использовалась не полностью, поэтому необходимо увеличить число каналов такой решетки, оставив отношение длины к радиусу прежним.

Успешный запуск молекулярного генератора без жидкого азота позволяет перейти к практическому осуществлению молекулярного генератора с циркуляцией аммиака [2] (см. рис. 2). Возможность такой циркуляции обеспечивается тем, что выпускное давление обычных высоковакуумных насосов имеет ту же величину, что и рабочее давление газа в источнике, т. е. 10^{-2}—1,0 *мм* рт. ст. Если в начальный момент в предварительно обезгаженную и откачанную до высокого вакуума систему напустить чистый аммиак до давления $1 \cdot 10^{-3}$ *мм* рт. ст. и взять $V_1/V_2 \simeq 10^2$ (см. рис. 2), то при включении насоса с подобранной по формуле (1) производительностью практически весь газ перейдет в V_2, т. е. в источник, где давление будет в V_1/V_2 раз выше начального, т. е. $\sim 10^{-1}$ *мм* рт. ст. Тем самым все условия работы как вакуумного насоса, так и

* Технология изготовления этих решеток разработана Г. А. Семеновым.

олекулярного генератора будут выполнены. Для длительной работы такой конструкции необходимы масло с высокой термостойкостью и геттер, не поглощающий ммиак. Генератор с циркуляцией может быть выполнен также в двухкамерном арианте.

Авторы выражают признательность И. Н. Ораевскому и Г. П. Барыкину, принимавшим участие в экспериментах.

ЛИТЕРАТУРА

. Н. Г. Басов, Приборы и техника эксперимента, 1957, 1, 71.
. Г. А. Васнева, В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, Докл. на Второй Всесоюзной конференции МВО СССР по радиоэлектронике, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 3, 442.

Поступило в редакцию
12 VII 1960

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

К ВОПРОСУ О МЕХАНИЗМЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В ряде работ [2, 3], посвященных исследованию плазменных колебаний, предполагалось, что в опытах Мерилла и Вебба [1] и сходных с ними колебания возбуждаются при помощи механизма, близкого к клистронному [5, 7]. В дальнейшем [4] было показано, что наблюдаемые в аналогичных условиях явления можно объяснить на основе сочетания принципа фазовой фокусировки с когерентным взаимодействием образующихся электронных сгустков с плазмой.

Успешное развитие теории пространственного взаимодействия потока электронов с плазмой [5—11] (в дальнейшем будем называть это взаимодействие механизмом ЛБВ) и экспериментальное подтверждение этой теории [12—16] вызвали естественное стремление к пересмотру толкования проведенных ранее опытов, в частности опытов [17] и [1]. Критика первоначального объяснения опытов Луни и Брауна [17], сделанная на серьезной теоретической и экспериментальной основе [19, 18], по-видимому, правильна, хотя новые представления разных авторов отличаются друг от друга [19, 18]. Анализ же опытов Мерилла и Вебба сделан примитивно, и мнения, высказанные по этому поводу, не являются убедительными. Существует мнение [11, 20] о том, что эти опыты [1] объясняются механизмом ЛБВ. В доказательство указано [20] лишь, что скорость нарастания амплитуды плазменной волны, подсчитанная на основании теории [10], которая количественно плохо согласуется с опытом, может быть достаточно высокой. Другое мнение [16, 18] состоит в том, что возбуждение колебаний в опытах [1] связано с осцилляцией электронов в потенциальной яме, и не сопровождается аргументацией. В упомянутых работах [16, 11, 18, 20] нет более или менее подробного анализа соответствия наблюдаемых в опытах [1] фактов с высказываемыми предположениями о природе этих фактов.

В связи с таким разнообразием мнений о сущности столь фундаментальных опытов, как опыты Мерилла и Вебба, мы намерены показать, что в настоящее время нет оснований для того, чтобы сомневаться в клистронном механизме возбуждения колебаний, и обратить внимание на то, что при любой попытке иного объяснения этих опытов нужно дать объяснение целому ряду фактов.

В случае механизма ЛБВ области модуляции и передачи энергии от потока электронов в плазме должны быть совмещены, а в случае клистронного механизма пространственно разделены и сосредоточены в резко ограниченных зонах. Для обоснования возможности существования клистронного плазменного генератора необходимо прежде всего показать существование на границе плазмы переменного поля СВЧ с достаточной амплитудой, что подтверждается непосредственными опытами [21]. Пучок электронов, проходящий через такую границу плазмы, модулируется и превращается в ряд следующих друг за другом сгустков, имеющих максимальную плотность в месте фазового фокуса. В этом месте происходит наиболее сильное взаимодействие пучка с плазмой (когерентное взаимодействие зарядов сгустка с плазмой), и при этом возможна обратная связь с зоной модуляции за счет, например, волны, распространяющейся от области фазового фокуса. При наличии устойчивой обратной связи (практически она достигается терпеливым подбором комбинации тока и энергии пучка электронов) в области фазового фокуса отмечается не только аномальное рассеяние, но и «монохроматические» колебания. В отсутствие необходимой обратной связи фазовая фокусировка будет существовать в отдельные короткие промежутки времени. При этом аномальное рассеяние сохранится, но возникновение колебаний в виде более или менее коротких пакетов волн приведет к тому, что обычные индикаторы обнаружат не определенную частоту, а более широкий спектр частот (шум). Этот клистронный механизм, дополненный учетом когерентного взаимодействия [4], позволяет объяснить следующие факты.

1. Образование резко ограниченных в пространстве зоны рассеяния и колебательной зоны, их взаимное смещение, перемещение их к катоду при уменьшении скорости электронов либо при увеличении концентрации плазмы (уменьшение фазового фокусного расстояния при увеличении частоты).

2. Порядок величины энергетического взаимодействия (потери энергии, энергии аномально быстрых электронов), рост энергетических потерь при увеличении тока или при уменьшении энергии электронов, независимость потерь от концентрации внешней плазмы.

3. Существование предельного взаимодействия. Энергетические потери возрастают с ростом тока пучка электронов, но, начиная с некоторой величины этого тока, рост

потерь прекращается (см., например, кривые *7* и *8* рис. 2 [4]). Можно показать, что это связано с расплыванием электронных сгустков под действием собственного объемного заряда; при некотором токе пучка минимальные размеры сгустка начинают превышать размеры плазменной длины волны.

4. Возникновение, наряду с аномальным рассеянием, шумов или колебаний с фиксированной частотой (см. выше).

Некоторым указанием на различие механизмов взаимодействия, например в случаях [4] и [16], является и то, что при одинаковой, по порядку величины, мощности пучка электронов колебательная мощность в случае [4] оказывалась на много порядков больше. Следует обратить внимание на то, что именно когерентное взаимодействие электронных сгустков с плазмой было предложено использовать как способ введения энергии в плазму [22, 23]. Не в пользу роли механизма ЛБВ свидетельствует и тот факт, что протяженность колебательной зоны в рассматриваемых опытах бывает меньше плазменной длины волны.

Таким образом, отмеченное выше стремление к унифицированному толкованию различных опытов не всегда дает положительные результаты. Никто в настоящее время не сомневается в существовании механизма ЛБВ, но это не исключает того, что в некоторых случаях возбуждение колебаний обязано и механизму, имеющему много общего с клистронным. Больше того, если говорить об осуществлении плазменных генераторов с самовозбуждением, то возможностей здесь не две, а три, так как существует еще аналог генератора с положительной сеткой, детально рассмотренный в [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Merill, W. Webb, Phys. Rev., 1939, **55**, 1191.
2. G. Wehner, J. Appl. Phys., 1951, **22**, 761.
3. T. R. Neill, K. G. Emeleus, Proc. Roy. Irish Acad. A., 1951, **53**, 197.
4. М. Д. Габович, Л. Л. Пасечник, ЖЭТФ, 1959, **36**, 1025.
5. D. Bohm, D. Gross, Phys. Rev., 1949, **75**, 1851, 1864; 1950, **79**, 992.
6. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, 1951, **21**, 1262.
7. А. А. Власов, Теория многих частиц, ГИТТЛ, 1950.
8. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 1946, **16**, 574.
9. M. A. Lampert, J. Appl. Phys., 1956, **27**, 5.
10. M. Sumi, J. Phys. Soc. Japan, 1959, **14**, 653.
11. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ, 1959, **36**, 1405.
12. G. D. Boyd, L. M. Field, W. Gould, Phys. Rev., 1958, **109**, 1393.
13. М. Д. Габович, Л. Л. Пасечник, Докл. на 2-й Всесоюзной конференции по газовой электронике, 1958; Радиотехника и электроника, 1959, 4, 11, 1850.
14. Е. В. Богданов, В. Я. Кислов, З. С. Чернов, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 2, 229.
15. А. А. Зайцев, ЖЭТФ, 1959, **36**, 1332.
16. Р. А. Демирханов, А. К. Геворков, А. Ф. Попов, ЖТФ, 1960 **30**, 315.
17. D. H. Looney, S. C. Brown, Phys. Rev., 1954, **93**, 965.
18. Р. А. Демирханов, А. К. Геворков, А. Ф. Попов, Г. И. Зверев, ЖТФ, 1960, **30**, 306.
19. M. Sumi, J. Phys. Soc. Japan, 1959, **14**, 1093.
20. M. Sumi, J. Phys. Soc. Japan, 1954, **9**, 88.
21. D. Gabor, E. Ash, D. Dracott, Nature, 1955, **176**, 916.
22. K. D. Sinelnikov et al., Proc. of the Genera conference, 1958, № 2211.
23. A. I. Akhiezer et al., Proc. of the Geneva conference, 1958, № 2300.

М. Д. Габович

Институт физики
АН УССР

Поступило в редакцию
21 IV 1960

АКАДЕМИК АБРАМ ФЕДОРОВИЧ ИОФФЕ

14 октября 1960 г. скончался академик Абрам Федорович Иоффе — выдающийся советский ученый, обогативший науку и технику многими важнейшими открытиями и исследованиями.

А. Ф. Иоффе родился 29 октября 1880 г. в г. Ромны (б. Полтавской губ.). После окончания в 1902 г. Петербургского технологического института, не будучи удовлетворенным уровнем науки в царской России, он поступает в Мюнхенский университет, который оканчивает в 1905 г. со степенью доктора философии. После возвращения в 1906 г. в Петербург он начинает свою работу ученого, педагога и организатора, которую неутомимо вел до самого последнего дня своей жизни.

Уже ранние исследования А. Ф. Иоффе по атомной природе электричества, так же как и исследования элементарного фотоэлектрического эффекта, привели к принципиальным результатам первостепенного значения и вошли в число классических экспериментов современной физики.

Не меньшее значение имели широко известные работы А. Ф. Иоффе и его учеников по исследованию механических и электрических свойств кристаллов. В этих работах было впервые убедительно разъяснено, в чем заключается причина резкого различия между молекулярной и технической прочностями кристаллов, а исследования электропроводности и пробоя кристаллов способствовали разъяснению запутанных явлений движения электрических зарядов и поляризации в диэлектрических кристаллах.

Исследования полупроводников, начатые А. Ф. Иоффе еще с 1930 г., невозможно переоценить. А. Ф. Иоффе и его ближайшими сотрудниками были подробно изучены электрические, магнитные и тепловые явления в полупроводниках, что позволило разобраться в основных чертах сложных явлений примесной и собственной электропроводностей полупроводников, а также в механизме электронной и дырочной проводимостей. Высказанная А. Ф. Иоффе и А. В. Иоффе еще в 1937 г. идея о природе выпрямления электрического тока в контакте двух полупроводников с разным типом проводимости получила в дальнейшем блестящее развитие в работах советских и зарубежных ученых и лежит в основе всех важнейших современных технических применений полупроводников. Исследования А. Ф. Иоффе по термоэлектричеству, приведшие к созданию лабораторных образцов полупроводниковых термоэлектрических генераторов и холо-

дильников с практически пригодными кпд, намного опередили зарубежные исследования и создают основу для развития новой области энергетики.

Работы А. Ф. Иоффе получили широкую известность и признание. А. Ф. Иоффе был избран членом академий и научных обществ многих стран.

Деятельность А. Ф. Иоффе по организации научных исследований в Советском Союзе была поистине беспримерной. По инициативе и при активном участии А. Ф. Иоффе были организованы физико-технические институты в Ленинграде, Харькове, Свердловске, Днепропетровске, Томске; Институт химической физики и Электрофизический институт в Ленинграде, а также Ленинградский физико-агрономический институт, являющийся единственным в мире институтом такого профиля. А. Ф. Иоффе воспитал большую плеяду блестящих ученых, многие из которых, в свою очередь, обогатили человечество важнейшими открытиями, которыми гордится Советская наука.

В своей кипучей деятельности А. Ф. Иоффе неизменно проявлял себя не только как выдающийся ученый, но и как патриот своего Советского отечества. Сразу же после Великой Октябрьской социалистической революции он был одним из первых крупных ученых, активно включившихся в дело развития Советской науки и техники, отдавая все свои силы этой почетной задаче. А. Ф. Иоффе всегда сочетал интерес к глубоким, принципиальным вопросам физики с интересом к технике и всегда стремился, чтобы достижения физики были использованы для развития технической мощи нашей страны.

Советское Правительство высоко оценило деятельность и достижения А. Ф. Иоффе, удостоив его многих наград и присвоив ему в 1955 г. звание Героя Социалистического Труда.

Редколлегия

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция журнала «Радиотехника и электроника» просит авторов руководствоваться следующими правилами оформления статей.

1. Рукописи следует присылать в полностью законченном виде, написанными в сжатой форме, без излишних длиннот и повторений. Рукописи, эскизы иллюстраций, таблицы и проч. представляются в редакцию в двух экземплярах.

2. Статьи (за исключением кратких сообщений, писем в редакцию) должны иметь аннотацию (краткое содержание) объемом не более 10 строк.

3. Статья подписывается автором (соавторами), кроме того, указывается подробный почтовый адрес и номера телефонов (служебного и домашнего).

Объем рукописей

4. Присылаемые статьи не должны превышать 15 страниц; краткие сообщения — 6 стр. и письма в редакцию — 4 стр. Обзорные статьи не должны быть более 22 стр. В отдельных случаях возможно увеличение объема по предварительной рекомендации редакционной коллегии.

Статьи печатаются на пишущей машинке с крупным шрифтом через два интервала валика.

5. Количество рисунков к статье не должно превышать 5—6 (для обзорных статей— 10). Какие-либо дополнительные буквенные обозначения рисунков, кроме порядковых номеров (рис. 1, *а*, *б*, *в*; рис. 2, *а*, *б*, *в*) не рекомендуются.

6. На отдельном листе к статье прилагается текст подписей под рисунками.

7. Следует стремиться к тому, чтобы текст подписей под рисунками не повторялся еще раз в тексте статьи, хотя бы и в пересказе.

Оформление рукописей

8. Статьи свыше 4 страниц должны иметь введение и заключение (выводы). На отдельном листе прилагается список цитированной литературы.

9. Оба экземпляра статьи должны печататься на одной стороне листа, быть вполне отчетливыми и разборчивыми (один из них должен быть первым, а не копией); пользоваться цветной или тонкой бумагой, равно как и бумагой, пропускающей чернила, не следует. На одной стороне листа должно умещаться не более 30 строк, а в строке— не свыше 60 знаков. С левой стороны страницы оставляется чистое поле (30 *мм*). Страницы статьи (или краткого сообщения) нумеруются насквозь, без каких-либо дополнительных буквенных обозначений.

10. Все формулы и обозначения в тексте вписываются крупно и четко чернилами или тушью, оставляя свободное место для дополнительных указаний по набору. Особо внимательно следует вписывать подстрочные индексы и надстрочные показатели степени. Не следует прибегать к частичному вписыванию русских букв и цифр на машинке, а латинских и греческих от руки. Не рекомендуется пользоваться сложными индексами, превышающими 2 «этажа» (например, $U_{a_{2_i}}$ вместо $U_{a_{2i}}$). Числитель и знаменатель несложной дроби внутри текста следует разделить косой чертой (a/b).

11. Все буквы в формулах должны быть размечены автором. Особенно ясно следует указывать различие между строчными и прописными буквами, имеющими одинаковое начертание и отличающимися лишь размерами (например, *V* и *v*; *U* и *u*; *W* и *w*; *O* и *o*; *K* и *k*; *S* и *s*; *C* и *c*; *P* и *p*). Для этого необходимо прописные буквы в формулах подчеркивать двумя черточками снизу ($\underline{\underline{C}}$), а строчные — двумя черточками сверху ($\overline{\overline{c}}$). Нужно также указывать, букву или цифру означает знак 0 (нуль отмечают одной чертой снизу, а букву вовсе не отмечают). Не следует прибегать в статье к обозначениям $C_{0\ (\text{нулевое})}$ и $C_{o\ (\text{общее})}$, применяя во втором случае, например, какой-либо другой индекс. Для того чтобы отличать в наборе латинские буквы *I* и *J* (плотность тока, функция Бесселя) букву *I* пишут как римскую единицу.

Разметку букв в формулах выполняют простым черным карандашом. Греческие буквы подчеркивают (или окружают) красным карандашом, векторные величины — синим. Комплексные величины отмечают звездочкой малого размера, а усредненные — одной черточкой сверху.

Все буквы латинского алфавита и сокращенные обозначения единиц измерений (например, не V_{max}, а $V_{макс}$; не *V*, *v*, а *V*, *в*) (только русские буквы!) будут набраны курсивом (пример: 3 *м*, 100 *ком*, *RC*, *LC*). Индексы, образованные сокращением русских слов, — прямым шрифтом (пример: $U_{вх}$, $U_{вых}$; $I_{и}$ (импульсный); $\lambda_{крит}$). Такие сокращенные обозначения в рукописи следует размечать: для набора курсивом — волнистой чертой снизу, а для набора прямым шрифтом — «коробочкой» (пример $\lambda_{крит}$).

Индексы, являющиеся сокращением одного русского слова, пишут без точки на конце как знака сокращения (например, $P_{расч}$).

12. Нумерация формул в статье должна быть порядковой и сквозной, арабскими цифрами в скобках, справа от формулы. Желательно избегать сдвоенных или сложных номеров (пример: 6_2, 6, XI). Нумеровать нужно лишь те формулы, на которые затем делаются ссылки в тексте.

13. Абзацы статьи, которые можно набрать более мелким шрифтом — петитом (например, краткое содержание, примечание), автор отмечает вертикальной чертой у левого поля.

14. Количество подстрочных примечаний и их размер должны быть минимальными. Длинные подстрочные примечания с формулами лучше вводить в основной текст статьи. Ссылки на литературу нужно давать не в виде подстрочных (или надстрочных) примечаний, а указывать номер ссылки (по приложенному списку литературы) в квадратных скобках на строке (пример: [3]).

15. Список литературы к статье печатается в следующем порядке.

Журнальные статьи — инициалы и фамилия автора (авторов), название статьи, наименование журнала, год, номер тома (подчеркивается двумя черточками снизу), номер выпуска, страницы. Иностранные статьи указываются на языке подлинника, без перевода. Не допускаются смешанные ссылки, например, указание только фамилии автора и названия журнала.

Книги — инициалы и фамилия автора (авторов), полное название книги, номер тома, издательство и год издания (при ссылке на главы книги и страницы указываются дополнительные данные). Если книга переведена на русский язык, то необходимо указать это (перевод с англ.).

Оформление чертежей, схем, графиков

17. Иллюстрации к статье (рисунки, чертежи, фотографии, осциллограммы, графики) представляются в двух экземплярах отдельно от рукописи. Они не приклеиваются к соответствующим страницам рукописи и свободные места на страницах не оставляются. На обороте каждого рисунка должны быть указаны фамилия автора и название статьи, а также номер рисунка дробью (в числителе — порядковый номер рисунка, в знаменателе — общее число рисунков к данной статье).

18. Чертежи, рисунки, фотографии должны быть отчетливы, выполнены чернилами или тушью в таком формате, который обеспечивает хорошее понимание и разборчивость всех деталей, надписей, стрелок и т. д.

19. Эскизы чертежей, схемы, графики следует присылать в таком виде, который максимально облегчает возможность их воспроизведения или копирования. Большое количество текстовых надписей на отдельных участках рисунка, явно перегружающее его, не допускается. Надписи на чертежах, схемах должны быть в виде цифр или букв, расшифровываемых в подписи под рисунком.

При замене подлинников рисунков фотокопиями последние нужно выполнять без уменьшения и печатать на матовой контрастной бумаге, не прибегая к последующему накату. Надписи на фотографиях, стрелки, линии и буквы нельзя писать чернилами. Вместо этого нужно сделать такие надписи на отдельных листках прозрачной бумаги, приклеенной к свободным полям фотографии.

20. Чертежи, рисунки, графики должны содержать только те буквы и обозначения, которые упоминаются в тексте статьи или в подписи под рисунком. Монтажные схемы, заводские синьки, содержащие ненужные для понимания статьи указания, следует предварительно перечертить, стремясь максимально облегчить рисунок. Применение вклеек большого формата допустимо лишь в исключительных случаях по предварительному согласованию с редакцией.

21. Графические обозначения деталей на схемах следует выполнять в соответствии с рекомендациями СЧХ (системы чертежного хозяйства), соблюдая масштабные размеры, толщины линий. Обозначения величин деталей (конденсаторов, сопротивлений, индуктивностей), если это необходимо, указываются непосредственно на схеме, рядом с деталью (сопротивления до 999 *ом* указываются целыми числами без слова ом; от 1 до 99 тыс. *ом* — цифрами и буквой *к* (пример: 99 *к*), от 1 *мегома* и выше — цифрой с запятой и нулем для целых значений (например, 1,0) или запятой со значащей цифрой (например, 2,3) без слова *Мом*.

Величины индуктивностей указываются в тексте или подрисуночной подписи (генри, миллигенри, микрогенри — *гн*, *мгн*, *мкгн*).

Величины емкостей — от 1 до 999 *пф* — цифрами без слова пф; от 1000 до 99000 *пф* — цифрами с буквами нф; от 1 *мкф* и выше — цифрой с запятой и нулем (для целых значений) или с запятой и значащей цифрой (пример: 1,5) без слова мкф.

23. На осях координат указывают откладываемые значения условными обозначениями (например, I, U) или — при необходимости пояснить — словами. Размерности у сокращенных обозначений указывают русскими буквами после запятой (I, *а*; U, *в*), а не в скобках.

23. Фотографии наиболее интересных деталей прибора, общие виды установок необходимо выполнять отчетливо на белой глянцевой бумаге (без фактуры) размером не менее 9 × 12 *см*. Фотографии новых приборов и их деталей желательно снимать с указанием масштаба (положив, например, рядом линейку, спичечную коробку). Фотографии осциллограмм срезов, микрошлифов должны быть четкими и контрастными по всему полю и выполняться на белой глянцевой бумаге (без фактуры) форматом не менее 4,5 × 6 *см*. На этих фотографиях не должно быть лишних деталей (например, перфорационных отверстий на кинопленке) и посторонних надписей. При объединении нескольких осциллограмм небольшого размера на одном рисунке каждой осциллограмме следует дать свой номер — цифру или букву на поле осциллограммы.

Оформление таблиц

Расположение граф, количество и размеры их следует тщательно продумать. Небольшие таблицы с малым числом строк и знаков в графах лучше давать без линеек (так называемый вывод). Количество граф в таблице должно допускать расположение ее на одной странице журнала горизонтально (предпочтительно) или же при большой таблице — вертикально. Каждая таблица должна иметь головку над столбцами и боковик — название горизонтальных строк. Кроме того, каждой таблице следует дать название и порядковый номер (сквозной). Ссылки в тексте статьи на таблицу даются сокращенно — табл. 4.

Прохождение корректуры

Автор получает от редакции о д н у корректуру. Изменения и дополнительные вставки или сокращения в тексте не допускаются. При большой авторской правке корректуры, вынуждающей переборку страниц, изготовление новых клише рисунков, редакция снимает статью из текущего номера.

Könyvtára

CONTENTS

Bunkin F. V. Thermal fluctuations in nonlinear systems 3
Bakhareva M. F. Cross correlation of field fluctuations of receiving lenses having limited dimensions 9
Prosin A. V. On calculation of cross noise power in scatter systems 14
Ignatiev N. K. Energy spectrum of a signal obtained by means of scanning . . 25
Vainstein L. A., Fedorov A. A. Scattering of plane and cylindrical waves on an elliptical cylinder and diffraction rays conception 31
Goriainov A. S. Diffraction of a plane electromagnetic wave on a conductive cone 47
Sivov A. N. Incidence of a plane electromagnetic wave on a plane grid (H is parallel to a wire) 58
Yashkin A. Ya. Bend P- and T-waveguides in E-plane 67
Nikolskii V. V. Investigation of hollow-type systems with anisotropic regions by method of natural functions. P. III. Waveguide. 74
Bulgakov B. M., Shestopalov V. P., Shishkin L. A., Yakimenko I. P. Nonreciprocal waves propagation in a helix waveguide placed in ferrite medium 81
Shestopalov V. P., Bulgakov A. A. Coaxial bifilar helix line in magnetodielectric medium 92
Sui Ien-shen. Some methods of solution of a problem concerning small gyrotropic sphere oscillations. P. II. Method of series 101
Fedotov A P., Shembel B. K. Linear accelerator resonator as microwave oscillator load 108
Lobov G. D. Gase-charge detector of microwave oscillations 117
Rubin S. B. Some theoretical problems concerning microwave phasometer . . . 125
Igritskii A. L. Optimal focusing of electron beam in a T. W. T. periodical focusing system 137
Yasnopolskii N. L., Karelina N. A., Malysheva V. S. Some results of investigation of transmission secondary electron emission from MgO-emitters 146
Schwarz Ya. M. On the theory of electrostatic fluxmeter operation in plasma 153
Belova N. A., Kovalev A. N. Experimental investigation of a tunnel current in thin germanium $p-n$-junctions 160
Bazarov E. N., Zhabotinskii M. E. Fluctuations in an oscillator on a reflex klystron depending upon electron velocities distribution by shot and thermal effects 166

BRIEF REPORTS

Zeitlin M. B., Ilyina E. M. T. W. T. amplification with finite values of the amplification parameter C 170
Grigoriants V. V., Zhabotinskii M. E. Ammonia beam maser operating without liquid nitrogen 175

LETTERS TO THE EDITOR

Gabovich M. D. Excitation mechanism of electron plasma oscillations . . . 178
Abram Fiodorovich Ioffe 180

Цена 1 р. 38 к.

1961 FEB